Capítulo 1

Espacios Métricos

Un *espacio métrico* es un par (X, d), formado por un conjunto no vacío X y una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, llamada *función distancia* o *métrica* de X, tal que

1. $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$ (simetría),
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad triangular).

Los elementos de X son llamados *puntos* de X. Cuando no haya posibilidad de confusión hablaremos simplemente de un espacio métrico X sin hacer referencia a la función distancia, la cual genéricamente será denotada con d.

EJEMPLOS 1.1. *A continuación damos una breve lista de espacios métricos. Más adelante veremos otros ejemplos.*

1. $\mathbb{R}^n$ *es un espacio métrico via la función distancia* $d_\infty(x, y) := \max_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$, *donde* x_i *es la* i*-ésima coordenada de* x, *e* y_i, *la de* y.
2. *El conjunto* $\mathrm{C}[a, b]$, *de las funciones continuas del intervalo cerrado* $[a, b]$ *en* $\mathbb{R}$, *es un espacio métrico via la función distancia* $d_\infty\colon \mathrm{C}[a, b] \times \mathrm{C}[a, b] \to \mathbb{R}$, *definida por* $d_\infty(f, g) := \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - g(t)|$.
3. *Para cualquier conjunto* X, *la función* $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *definida por*
$$d(x, y) := \begin{cases} 0 & \textit{si } x = y, \\ 1 & \textit{en otro caso}, \end{cases}$$
es una métrica sobre X, *llamada* métrica discreta *de* X.
4. *Si* X *es un espacio métrico, entonces también lo es cada subconjunto* Y *de* X, *con la métrica inducida. Cada uno de estos espacios es llamado un* subespacio métrico de X.
5. *El producto* $X \times Y$, *de dos espacios métricos* X *e* Y, *es un espacio métrico via la distancia* $d_\infty((x, y), (x', y')) := \max(d^X(x, x'), d^Y(y, y'))$, *donde* d^X *denota la distancia*

en X y d^Y la distancia en Y. Salvo indicación en contrario, siempre consideraremos a $X \times Y$ dotado con esta métrica.

6. *Para cada $p \geq 1$, la función $d_p\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por*
$$d_p(x,y) := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p},$$
es una distancia sobre $\mathbb{R}^n$.

7. *Para cada $p \geq 1$, el conjunto $\mathrm{C}[a,b]$, de las funciones continuas del intervalo cerrado $[a,b]$ en $\mathbb{R}$, es un espacio métrico via la función distancia $d_p\colon \mathrm{C}[a,b] \times \mathrm{C}[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $d_p(f,g) := \sqrt[p]{\int_a^b |f(t) - g(t)|^p\, dt}$.*

Es claro que en todos los ejemplos mencionados arriba se satisfacen los dos primeros items de la definición de distancia, y es fácil ver que en todos, salvo quizás en los dos últimos, vale la desigualdad triangular. Para verificar que esta se satisface en el anteúltimo es suficiente aplicar la desigualdad de Minkowski

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p},, \tag{1}$$

con x_i e y_i sustituídos por $x_i - y_i$ e $y_i - z_i$, respectivamente. La desigualdad (13) es evidente cuando $p = 1$, y para $p > 1$ es una consecuencia de la desigualdad e Holder: Si $p, q > 1$ y $1/p + 1/q = 1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\, \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q}. \tag{2}$$

En efecto, aplicando (2) a $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ y $(z_1, \dots, z_n)$, y a $(|y_1|, \dots, |y_n|)$ y $(z_1, \dots, z_n)$, donde $z_i = (|x_i| + |y_i|)^{p-1}$, y teniendo en cuenta que $(p-1)q = p$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p &= \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\
&= \sum_{i=1}^{n} |x_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i|(|x_i| + |y_i|)^{p-1} \\
&\leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}\, \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p}\, \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p} \\
&= \left(\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p} \right) \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p}.
\end{aligned}$$

Dividiendo ahora ambos miembros por $\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p}$ obtenemos la desigualdad

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p} + \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p},$$

de la cual la de Minkiowski es una consecuencia inmediata.

Probemos ahora la desigualdad de Holder. Es claro que esta vale cuando $\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = 0$ o $\sqrt[q]{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} = 0$ y que si vale para $(x_1, \dots, x_n)$ e $(y_1, \dots, y_n)$, entonces también vale para $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ y $(\mu y_1, \dots, \mu y_n)$, cualesquiera sean λ y μ en $\mathbb{R}$. Por lo tanto será suficiente probar que

$$\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p} = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |y_i|^q} = 1 \Longrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i y_i| \le 1. \tag{3}$$

Pero esto se sigue de que si $p, q > 1$ satisfacen $1/p + 1/q = 1$, entonces $ab \le \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$ para todo $a, b \ge 0$. En efecto, usando esta desigualdad obtenemos que

$$\sum_{i=1}^n |x_i||y_i| \le \frac{1}{p} \sum_{i=1}^n |x_i|^p + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^n |y_i|^q,$$

lo cual, combinado con el hecho de que $\sum_{i=1}^n |x_i|^p = \sum_{i=1}^n |y_i|^q = 1$ y $1/p + 1/q = 1$ da (3). Para terminar debemos ver que

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \quad \text{para todo } a, b \ge 0. \tag{4}$$

Para ello consideramos el plano (ξ, η). Como $p > 1$, la función $\eta = \xi^{p-1}$, definida para los números reales mayores o iguales que cero, es estrictamente creciente. Dado que, por hipótesis, $(p-1)(q-1) = 1$, su inversa es $\xi = \eta^{p-1}$. Es claro que ab es menor que la suma de las areas A_1, delimitada por el eje ξ, la recta $\xi = a$ y la gráfica de $\eta = \xi^{p-1}$ y A_2, delimitada por el eje η, la recta $\eta = b$ y la gráfica de $\xi = \eta^{q-1}$. Para terminar la demostración es suficiente observar que

$$A_1 = \int_0^a \xi^{p-1}\, d\xi = \frac{a^p}{p} \qquad \text{y} \qquad A_2 = \int_0^b \eta^{q-1}\, d\eta = \frac{b^q}{q}.$$

Veamos ahora que en el séptimo ejemplo también se satisface la desigualdad triangular. En efecto, de la desigualdad (4) se obtiene facilmente la desigualdad integral de Holder

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \le \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p\, dt}\, \sqrt[q]{\int_a^b |g(t)|^q\, dt},$$

de la que a su vez se sigue la desigualdad integral de Minkowski

$$\sqrt[p]{\int_a^b |f(t) + g(t)|^p\, dt} \le \sqrt[p]{\int_a^b |f(t)|^p\, dt} + \sqrt[p]{\int_a^b |g(t)|^p\, dt},$$

la cual claramente implica que en el séptimo ejemplo se satisface la desigualdad triangular.

Ejercicio 1.2. *Un conjunto X, junto con una función $d\colon X \times X \to \mathbb{R}_{\ge 0}$, llamada* función pseudistancia *o* pseudométrica *de X, es un* espacio pseudométrico *si d satisface las condiciones 2 y 3 de la definición de espacio métrico.*

1. *Pruebe que la relación en X definida por $x \sim y$ si $d(x, y) = 0$ es de equivalencia.*
2. *Denotemos con $\frac{X}{\sim}$ al conjunto cociente y con $\pi\colon X \to \frac{X}{\sim}$ a la proyección canónica. Pruebe que existe una única función $\overline{d}\colon \frac{X}{\sim} \times \frac{X}{\sim} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ tal que $d = \overline{d} \circ (\pi \times \pi)$, y que esta función es una distancia.*

Por el resto de este capítulo X es un espacio métrico.

OBSERVACIÓN 1.3. *Los siguientes hechos valen:*

1. $d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n)$, *para todo conjunto finito* $x_1, \ldots, x_n$ *de puntos de* X.
2. $|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y)$, *para toda terna* x, y, z *de elementos de* X.

DEMOSTRACIÓN. El item 1 se sigue facilmente de la desigualdad triangular por inducción en n. Para probar el item 2, basta observar que por la misma desigualdad y la condición de simetría de la distancia, $d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y)$ y $d(y, z) - d(x, z) \leq d(y, x) = d(x, y)$. $\square$

Las *bolas abiertas* y *cerradas* con *centro* en un punto z de X y *radio* $r > 0$, son los conjuntos

$$\mathrm{B}_r(z) := \{x \in X : d(x, z) < r\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{B}_r[z] := \{x \in X : d(x, z) \leq r\},$$

respectivamente.

PROPOSICIÓN 1.4. $\mathrm{B}_r(x) \cap \mathrm{B}_s(y) = \emptyset$ *siempre que* $r + s \leq d(x, y)$.

DEMOSTRACIÓN. Si existiera $z \in \mathrm{B}_r(x) \cap \mathrm{B}_s(y)$, entonces sería

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < r + s \leq d(x, y),$$

absurdo. $\square$

Un *entorno* de un punto $x \in X$ es cualquier subconjunto V de X que incluye una bola abierta con centro en x.

El *diámetro* de un conjunto $Y \subseteq X$ es el número $\operatorname{diám}(Y) := \sup_{x,y \in Y} d(x, y)$. Por ejemplo $\operatorname{diám}(\mathrm{B}_r(x)) \leq 2r$. Un conjunto es *acotado* si tiene diámetro finito.

La *distancia* de un punto x de X a un conjunto $A \subseteq X$ es $d(x, A) = \operatorname{ínf}_{y \in A} d(x, y)$.

OBSERVACIÓN 1.5. $|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y)$, *para todo* $x, y \in X$.

DEMOSTRACIÓN. Como $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $z \in A$,

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \text{para todo } z \in A.$$

Por lo tanto $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Por simetría, $d(y, A) \leq d(x, y) + d(x, A)$. $\square$

1. Sucesiones Convergentes

Una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X es *convergente* si existe $x \in X$ tal que la sucesión de números reales $(d(x_n, x))_{n \in \mathbb{N}}$ tiende a 0. En este caso decimos también que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *tiende* a x o que x es el *límite* de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, y escribimos

$$x = \lim_{n \to \infty} x_n, \qquad \text{o} \qquad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \to \infty.$$

Este límite es único. En efecto, como $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y)$ para todo n, si

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \to \infty]{} x \qquad \text{y} \qquad (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow[n \to \infty]{} y\ ,$$

entonces $d(x, y) = 0$ y, por lo tanto, $x = y$. Una sucesión de puntos de X es *divergente* si no es convergente.

OBSERVACIÓN 1.6. *Son equivalentes:*

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$
2. *Para toda bola abierta* $\mathrm{B}_r(x)$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \in \mathrm{B}_r(x)$ *si* $n \geq n_0$.
3. *Para todo entorno* V *de* x*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_n \in V$ *si* $n \geq n_0$.

2. Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados

Un subconjunto U de X es *abierto* si para todo $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}_r(x) \subseteq U$. De esta definición se sigue inmediatamente que todo conjunto abierto es unión de bolas abiertas. Pronto veremos que también vale la recíproca.

EJEMPLO 1.7. *Dados números reales* $a \leq b$*, el intervalo abierto* (a,b) *es un abierto de* $\mathbb{R}$*. Más generalmente, para cada espacio métrico* X *las bolas abiertas* $\mathrm{B}_r(x)$ *son abiertos. En efecto, dado* $y \in \mathrm{B}_r(x)$*, la bola* $\mathrm{B}_{r-d(x,y)}(y)$ *está incluída en* $\mathrm{B}_r(x)$*, porque para cada* $z \in \mathrm{B}_{r-d(x,y)}(y)$*,*

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + r - d(x,y) = r.$$

Dejamos como ejercicio para el lector el probar que en todo espacio métrico el complemento de cada bola cerrada es abierto, y que para cada $a \in \mathbb{R}$ *los intervalos abiertos* $(-\infty, a)$ *y* (a, ∞) *son abiertos de* $\mathbb{R}$*.*

TEOREMA 1.8. *Los siguientes hechos valen:*

1. X *y* $\emptyset$ *son abiertos.*
2. *Si* $(U_j)_{j\in J}$ *es una familia de subconjuntos abiertos de* X*, entonces* $\bigcup_{j\in J} U_j$ *es abierto.*
3. *Si* U *y* V *son subconjuntos abiertos de* X*, entonces* $U \cap V$ *es abierto.*

DEMOSTRACIÓN. Es claro que X y $\emptyset$ son abiertos. Dado $x \in \bigcup_{j\in J} U_j$, existe $i \in J$ tal que $x \in U_i$. Entonces, como U_i es abierto,

$$\mathrm{B}_r(x) \subseteq U_i \subseteq \bigcup_{j\in J} U_j$$

para algún $r > 0$. Esto prueba que $\bigcup_{j\in J} U_j$ es abierto. Por último, dado $x \in U \cap V$, existen números reales positivos r y r', tales que $\mathrm{B}_r(x) \subseteq U$ y $\mathrm{B}_{r'}(x) \subseteq V$. Denotemos con r'' al mínimo de r y r'. Es claro que $\mathrm{B}_{r''}(x) \subseteq U \cap V$. □

Del Ejemplo 1.7 y el Teorema 1.8 se sigue inmediatamente que un conjunto $U \subseteq X$ es abierto si y sólo si es unión de bolas abiertas. Para los abiertos de la recta hay una descripción más precisa.

TEOREMA 1.9. *Un subconjunto* U *de* $\mathbb{R}$ *es abierto si y sólo si es unión disjunta de intervalos abiertos.*

DEMOSTRACIÓN. $\Leftarrow$): Esto es una consecuencia inmediata del Ejemplo 1.7 y del Teorema 1.8.

$\Rightarrow$): Para cada $x \in \mathbb{R}$, denotemos con I_x a la unión de todos los intervalos abiertos de $\mathbb{R}$ que contienen a x y están incluídos en U. Escribamos $a_x := \inf(I_x)$ y $b_x := \sup(I_x)$. Es evidente que

$$(a_x, b_x) \subseteq I_x \subseteq \begin{cases} [a_x, b_x] & \text{si } a_x \neq -\infty \text{ y } b_x \neq \infty, \\ (a_x, b_x] & \text{si } a_x = -\infty \text{ y } b_x \neq \infty, \\ [a_x, b_x) & \text{si } a_x \neq -\infty \text{ y } b_x = \infty, \\ (a_x, b_x) & \text{si } a_x = -\infty \text{ y } b_x = \infty, \end{cases}$$

pero como I_x es abierto, forzosamente $I_x = (a_x, b_x)$. Es claro que $U = \bigcup I_x$. Para terminar la demostración basta observar que si $I_x \cap I_y \neq \emptyset$, entonces $I_x = I_y$, ya que si no fuera así, $I_x \cup I_y$ sería un intervalo abierto estrictamente mayor que I_x o que I_y, que contendría a x y a y, contradiciendo la definición de I_x o de I_y. □

Ejercicio 1.10. *Pruebe que la descomposición de un abierto U de $\mathbb{R}$ como unión disjunta de intervalos abiertos obtenida en el Teorema 1.9, es única. Pruebe también que la cantidad de intervalos es finita o numerable.*

Por el Teorema 1.8, para cada conjunto $A \subseteq X$ hay un máximo subconjunto abierto A° de A, llamado *interior* de A. En efecto, A° es la unión de todos los subconjuntos abiertos de A. Un punto x de X es un *punto interior* de A si pertenece a A°. En otras palabras, si $\mathrm{B}_r(x) \subseteq A$ para algún $r > 0$.

Teorema 1.11. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *$A^\circ \subseteq A$ y $A^\circ = A$ si y sólo si A es abierto.*
2. *Si $A \subseteq B$, entonces $A^\circ \subseteq B^\circ$.*
3. *$A^{\circ\circ} = A^\circ$.*
4. *$(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$.*
5. *$\bigcup_{j\in J} A_j^\circ \subseteq (\bigcup_{j\in J} A_j)^\circ$.*

Demostración. Los tres primeros items son evidentes. Por el item 2 sabemos que $(A \cap B)^\circ \subseteq A^\circ \cap B^\circ$, y la inclusión recíproca vale porque $A^\circ \cap B^\circ$ es un subconjunto abierto de $A \cap B$. La última afirmación se sigue del item 2. □

Ejercicio 1.12. *Pruebe que la igualdad $\bigcup_{j\in J} A_j^\circ = (\bigcup_{j\in J} A_j)^\circ$ en general no es cierta.*

El *exterior* de un subconjunto A de X es el conjunto $\mathrm{Ext}(A) := (X \setminus A)^\circ$.

Observación 1.13. *Un punto $x \in X$ pertenece al exterior de A si y sólo si $d(x, A) > 0$. En efecto, es claro que $\mathrm{B}_r(x) \subseteq X \setminus A$ si y sólo si $d(x, A) \geq r$.*

Un subconjunto C de X es *cerrado* si $X \setminus C$ es abierto. Por el Ejemplo 1.7, las bolas cerradas y los complementos de las bolas abiertas son cerrados.

Teorema 1.14. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *X y $\emptyset$ son cerrados.*
2. *Si $(C_j)_{j\in J}$ es una familia de subconjuntos cerrados de X, entonces $\bigcap_{j\in J} C_j$ es cerrado.*
3. *Si C y D son subconjuntos cerrados de X, entonces $U \cup V$ es cerrado.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 1.8. □

La *clausura* o *adherencia* $\overline{A}$, de un subconjunto A de X, es la intersección de todos los subconjuntos cerrados de X que que incluyen a A. Por su misma definición y el Teorema 1.14, la clausura de A es el mínimo cerrado que inluye a A.

Proposición 1.15. $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$ *y* $X \setminus A^\circ = \overline{X \setminus A}$.

Demostración. La primera igualdad vale porque $(X \setminus A)^\circ$ es el máximo subconjunto abierto de $X \setminus A$ y, por lo tanto, es el complemento del mínimo cerrado que incluye a A. La otra igualdad se puede probar de la misma manera. □

Proposición 1.16. *Para todo $A \subseteq X$ y cada $x \in X$ son equivalentes:*

1. $x \in \overline{A}$.
2. $\mathrm{B}_r(x) \cap A \neq \emptyset$ *para todo* $r > 0$.
3. *Hay una sucesión de puntos de A que tiende a x.*
4. $d(x, A) = 0$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Si existiera $r > 0$ tal que $\mathrm{B}_r(x) \cap A = \emptyset$, entonces $\mathrm{B}_r(x)$ estaría incluído en $X \setminus A$ y, por lo tanto, x pertenecería a $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$, lo que es absurdo.
2. $\Rightarrow$ 3. Tomemos $x_n \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x) \cap A$. Es evidente que la sucesión $x_1, \dots, x_n, \dots$ tiende a x.
3. $\Rightarrow$ 1. Como es el límite de una sucesión de puntos de A,

$$x \notin (X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}.$$

Así, $x \in \overline{A}$.
2. $\Leftrightarrow$ 4. Esto es evidente. □

Teorema 1.17. *Para cada subconjunto A de X valen los siguentes hechos:*

1. $A \subseteq \overline{A}$ *y* $A = \overline{A}$ *si y sólo si A es cerrado.*
2. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\overline{\bigcap_{j\in J} A_j} \subseteq \bigcap_{j\in J} \overline{A_j}$.

Demostración. Los tres primeros items son evidentes. Por el item 2 sabemos que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, y la inclusión recíproca vale porque $\overline{A} \cup \overline{B}$ es un subconjunto cerrado de X que incluye a $A \cup B$. La última afirmación se sigue del item 2. □

Un punto $x \in X$ es un *punto* de *acumulación* de un subconjunto A de X, si toda bola abierta de centro x contiene puntos de A distintos de x, es decir si $(\mathrm{B}_r(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. Denotamos con A' al conjunto de los puntos de acumulación de A. Es claro que $A' \subseteq \overline{A}$ y que si $x \in \overline{A} \setminus A$, entonces $x \in A'$. Así $\overline{A} = A \cup A'$. En consecuencia, A es cerrado si y sólo si $A' \subseteq A$. Un punto $x \in A$ es un *punto aislado* de A si existe $r > 0$ tal que $\mathrm{B}_r(x) \cap A = \{x\}$, es decir si no es un punto de acumulación de A. Un conjunto $A \subseteq X$ es un *subconjunto aislado* de X si $A' = \emptyset$. En otras palabras, si A es cerrado y todos sus puntos son aislados. La condición de que A sea cerrado es escencial. Por ejemplo, todos los puntos del conjunto $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ son aislados, pero A no es un subconjunto aislado de $\mathbb{R}$. Un conjunto $A \subseteq X$ es *perfecto* si $A' = A$. En otras palabras, si A es cerrado y no tiene puntos aislados. Observese que para que $x \in X$ sea un punto de acumulación de A es necesario y suficiente que exista una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos distintos de A que tienda a x.

La *frontera* de un subconjunto A de X es el conjunto

$$\partial(A) := \overline{A} \cap \overline{(X \setminus A)} = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Es facil ver que $\overline{A} = A \cup \partial(A)$ y $A^\circ = A \setminus \partial(A)$. Así, A es cerrado si y sólo si $\partial(A) \subseteq A$, y es abierto si y sólo si $A \cap \partial(A) = \emptyset$.

Recordemos que un subespacio de X es un subconjunto Y de X, provisto de la métrica inducida. Dado $y \in Y$, denotemos con $\mathrm{B}_r^Y(y)$ a la bola abierta en Y de centro y radio r. Analogamente, denotamos con $\mathrm{B}_r^Y[y]$ a la bola cerrada en Y de centro y y radio r. Es evidente que

$$\mathrm{B}_r^Y(y) = \mathrm{B}_r^X(y) \cap Y \qquad \text{y} \qquad \mathrm{B}_r^Y[y] = \mathrm{B}_r^X[y] \cap Y.$$

Teorema 1.18. *Consideremos un subespacio métrico Y de X. Un subconjunto A de Y es abierto (cerrado) en Y si y sólo si existe $\widetilde{A} \subseteq X$, abierto (cerrado) en X, tal que $A = \widetilde{A} \cap Y$.*

Demostración. Denotemos con A_Y° al interior de A como subconjunto de Y. Para cada punto y en A_Y°, tomemos una bola abierta $B_{r_y}^Y(y) \subseteq A$. Entonces

$$A^\circ = \bigcup_{y \in A_Y^\circ} B_{r_y}^Y(y) = \bigcup_{y \in A_Y^\circ} \left(B_{r_y}^X(y) \cap Y\right) = \left(\bigcup_{y \in A_Y^\circ} B_{r_y}^X(y)\right) \cap Y.$$

En consecuencia, si A es abierto en Y, entonces A es la intersección de Y con un abierto de X. Recíprocamente, supongamos que A es la intersección de Y con un abierto U de X. Dado $x \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r^X(y) \subseteq U$. Así, $B_r^Y(y) = B_r^X(y) \cap Y$ está incluído en $U \cap Y = A$, por lo que $x \in A^\circ$. Como esto vale para todo $x \in A$, A es un subconjunto abierto de Y. Terminamos la demostración observando que A es cerrado en $Y \Leftrightarrow Y \setminus A$ es abierto en $Y \Leftrightarrow \exists U \subseteq X$, abierto en X, tal que $U \cap Y = Y \setminus A \Leftrightarrow \exists U \subseteq X$, abierto en X, tal que $(X \setminus U) \cap Y = A$. $\square$

3. Funciones Continuas

Una función $f\colon X \to X'$, de un espacio métrico X en otro Y, es *continua en* $x \in X$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$, y es *continua* si lo es en cada punto $x \in X$. Por ejemplo, por el item 2 de la Observación 1.3, la función $d_z\colon X \to \mathbb{R}$, definida por $d_z(x) = d(x,z)$, donde z es un elemento fijado de X y d denota a la distancia en X, es continua.

Proposición 1.19. *Son equivalentes:*

1. *f es continua en x.*
2. *Para todo entorno abierto U de $f(x)$ hay un entorno abierto V de x tal que $f(V) \subseteq U$.*
3. *$f^{-1}(U)$ es un entorno de x, para cada entorno U de $f(x)$.*
4. *$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a $f(x)$, para cada sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiende a x.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \subseteq U$ y así basta tomar $V = B_\delta(x)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Tomemos un abierto U' de X' tal que $f(x) \in U' \subseteq U$. Por hipótesis existe un entorno abierto V' de x tal que $f(V') \subseteq U'$. La demostración se termina observando que $x \in V' \subseteq f^{-1}(U)$.

3. $\Rightarrow$ 1. Dado $\epsilon > 0$, la preimagen por f de $\mathrm{B}_\epsilon(f(x))$ es un entorno de x y, por lo tanto, incluye a una bola abierta $\mathrm{B}_\delta(x)$.

3. $\Rightarrow$ 4. Dado $\epsilon > 0$ tomemos un entorno V de x tal que $f(V) \subseteq B_\epsilon(f(x))$. Si n_0 es tal que $x_n \in V$ siempre que $n \geq n_0$, entonces $f(x_n) \in \mathrm{B}_\epsilon(f(x))$ siempre que $n \geq n_0$.

4. $\Rightarrow$ 3. Supongamos que hay un entorno V de $f(x)$ tal que $f^{-1}(V)$ no es un entorno de x. Entonces tomando, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $x_n \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x) \setminus f^{-1}(V)$, obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tiende a x, tal que la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ no tiende a $f(x)$. □

TEOREMA 1.20. *Son equivalentes:*

1. *f es continua.*
2. *$f^{-1}(U)$ es abierto en X, para cada subconjunto abierto U de X'.*
3. *$f^{-1}(C)$ es cerrado en X, para cada subconjunto cerrado C de X'.*
4. *$f(\overline{B}) \subseteq \overline{f(B)}$ para cada $B \subseteq X$.*

DEMOSTRACIÓN. 1. $\Rightarrow$ 2. Por la equivalencia entre los items 1 y 2 de la proposición anterior, $f^{-1}(U)$ es un entorno de cada uno de sus puntos.

2. $\Rightarrow$ 1. Fijemos $x \in X$ y un entorno abierto U de $f(x)$. Por hipótesis $f^{-1}(U)$ es un entorno abierto de x. Esto termina la demostración, porque $f(f^{-1}(U)) \subseteq U$.

2. $\Rightarrow$ 3. Si C es un cerrado de X', entonces $f^{-1}(C)$ es un cerrado de X, ya que

$$f^{-1}(C) = X \setminus f^{-1}(X' \setminus C)$$

y, por hipótesis, $f^{-1}(X' \setminus C)$ es abierto.

3. $\Rightarrow$ 2. Es similar a 2. $\Rightarrow$ 3.

3. $\Rightarrow$ 4. Como $B \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$ y $f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$ es cerrado, $\overline{B} \subseteq f^{-1}\big(\overline{f(B)}\big)$.

4. $\Rightarrow$ 3. Tomemos un cerrado arbitrario C de X'. Por hipótesis

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} \subseteq \overline{C} = C$$

y, en consecuencia, $\overline{f^{-1}(C)} \subseteq f^{-1}(C)$, de modo que $f^{-1}(C)$ es cerrado. □

Una función continua es un *homeomorfismo* si es biyectiva y su inversa es continua.

Una función $f\colon X \to X'$ es *abierta* si $f(U)$ es abierto para todo abierto U de X y es *cerrada* si $f(C)$ es cerrado para todo cerrado C de X.

OBSERVACIÓN 1.21. *Para cada función biyectiva $f\colon X \to X'$ son equivalentes:*

1. *f es un homeomorfismo.*
2. *f es continua y abierta.*
3. *f es continua y cerrada.*

4. Separabilidad

Un subconjunto A de X es denso si $\overline{A} = X$. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Recordemos que un conjunto A es contable si es finito o numerable. Un espacio métrico es *separable* si tiene un subconjunto contable y denso. Una *base* de X es un conjunto $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$, de subconjuntos abiertos de X, tal que

$$U = \bigcup_{\substack{V\in\mathcal{B}\\ V\subseteq U}} V,$$

para todo abierto U de X. Por ejemplo los conjuntos

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{B}_r(x) : x \in X \text{ y } r > 0\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}' = \{\mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

son bases de cada espacio métrico X.

Un *cubrimiento* de X es cuaquier familia $\mathcal{D}$ de subconjuntos de X tal que $X = \bigcup_{A \in \mathcal{D}} A$. Un subconjunto $\mathcal{D}'$ de $\mathcal{D}$ es un *subcubrimiento* de $\mathcal{D}$ si $\mathcal{D}'$ también cubre X. Un cubrimiento de X es *abierto* si todos sus miembros lo son.

TEOREMA 1.22. *Son equivalentes:*

1. *X es separable.*
2. *X tiene una base contable.*
3. *Cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento contable (propiedad de Lindeloff).*

DEMOSTRACIÓN. 1. $\Rightarrow$ 2. Para cada conjunto contable denso $\{x_n \in X : n \in \mathbb{N}\}$, el conjunto $\{\mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(x_n) : n, m \in \mathbb{N}\}$ es una base contable de X. En efecto, dados una bola abierta $\mathrm{B}_r(x)$ y un punto $y \in \mathrm{B}_r(x)$, tomemos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\mathrm{B}_{\frac{2}{m}}(y) \subseteq \mathrm{B}_r(x)$ y elijamos $x_n \in \mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(y)$. Entonces $y \in \mathrm{B}_{\frac{1}{m}}(x_n) \subseteq \mathrm{B}_{\frac{2}{m}}(y) \subseteq \mathrm{B}_r(x)$.

2. $\Rightarrow$ 3. Fijemos una base contable $\mathcal{B} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de X. Dado un cubrimiento abierto $\{V_j : j \in J\}$ de X, consideremos el subconjunto $\{U_{n_1}, U_{n_2}, \dots\}$ de $\mathcal{B}$ formado por los U_i's tales que $U_i \subseteq V_j$ para algún j. Para cada n_i, tomemos un V_j tal que $U_{n_i} \subseteq V_j$ y llamemoslo V_{n_i}. Entonces

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_{n_i} \supseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_{n_i} = X,$$

donde la última igualdad se sigue de que $V_j = \bigcup \{U_n : U_n \subseteq V_j\}$, para cada $j \in J$.

3. $\Rightarrow$ 1. Por hipótesis, para cada $n \in \mathbb{N}$, el cubrimiento abierto $\mathcal{V}_n = \{\mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x) : x \in X\}$ tiene un subcubrimiento contable $\widetilde{\mathcal{V}}_n = \{\mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x_{m,n}) : m \in \mathbb{N}\}$. Afirmamos que el conjunto contable $A = \{x_{n,m} : n, m \in \mathbb{N}\}$ es denso en X. En efecto, dados $x \in X$ y $\epsilon > 0$, podemos tomar $n \geq 1/\epsilon$ y elegir $x_{m,n}$ tal que $x \in \mathrm{B}_{\frac{1}{n}}(x_{m,n})$, lo que implica que $x_{m,n} \in B_\epsilon(x)$. □

Un punto $x \in X$ es un *punto* de *condensación* de un conjunto $A \subseteq X$, si $\mathrm{B}_r(x) \cap A$ no es contable para ningún $r > 0$. Dado $A \subseteq X$, denotamos con A^s al conjunto de los puntos de condensación de A.

TEOREMA 1.23. *Si X es separable y $A \subseteq X$ no es contable, entonces $A^s \cap A \neq \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos una base contable $\mathcal{B} = \{U_1, U_2, \dots\}$ de A. Si $A \cap A^s = \emptyset$, entonces, para cada $x \in A$, existe $U_i \in \mathcal{B}$ tal que $x \in U_i$ y $A \cap U_i$ es contable. Pero esto implica que $A = \bigcup \{A \cap U_i : \natural(A \cap U_i) \leq \aleph_0\}$ es contable. □

El siguiente resultado mejora al teorema anterior.

TEOREMA 1.24. *Si X es separable y $A \subseteq X$ no es contable, entonces $A \setminus (A^s \cap A)$ es contable.*

DEMOSTRACIÓN. Si $A \setminus (A^s \cap A)$ no fuera contable, entonces por el teorema anterior

$$A^s \cap \big(A \setminus (A^s \cap A)\big) \supseteq \big(A \setminus (A^s \cap A)\big)^s \cap \big(A \setminus (A^s \cap A)\big) \neq \emptyset,$$

lo que es absurdo. □

5. Espacios Métricos Completos

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X es de *Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$.

PROPOSICIÓN 1.25. *Toda sucesión convergente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de X es de Cauchy.*

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $x = \text{lím}_{n\to\infty} x_n$ y tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ si $n \geq n_0$. Entonces $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \epsilon$ siempre que $n, m \geq n_0$. □

TEOREMA 1.26. *Si una sucesión de puntos de X es de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces es convergente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $x_1, x_2, \dots$ es una tal sucesión y que $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots$ es una subsucesión convergente. Escribamos $x = \text{lím}_{n\to\infty} x_{i_n}$. Por hipótesis, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $d(x_{i_l}, x) < \epsilon/2$ y $d(x_n, x_m) < \epsilon/2$ siempre que $i_l, m, n \geq n_0$. Elijamos $i_l \geq n_0$. Entonces,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{i_l}) + d(x_{i_l}, x) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

siempre que $n \geq n_0$. □

Un espacio métrico es *completo* si todas sus sucesiones de Cauchy son convergentes. Por ejemplo, $\mathbb{R}$, con la métrica usual, es completo, y $\mathbb{Q}$ no. Además todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es completo. Por lo tanto, también son espacios métricos completos todos los subconjuntos cerrados de $\mathbb{R}$.

PROPOSICIÓN 1.27. *Si Y es un subespacio de X e Y es completo, entonces Y es un cerrado de X.*

DEMOSTRACIÓN. Dado $x \in \overline{Y}$ tomemos una sucesión de puntos de Y que tiende a x. Como esta sucesión es convergente es de Cauchy. Así, por hipótesis, converge en Y. Como su límite es x, esto implica que $x \in Y$. □

TEOREMA 1.28. *Para cada espacio métrico X son equivalentes:*

1. *X es completo.*
2. *Para toda sucesión $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \cdots$ de bolas cerradas cuyos radios tienden a cero,*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \neq \emptyset.$$
3. *Para toda sucesión $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \cdots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que* $\text{lím}_{n\to\infty} \text{diám}(C_n) = 0$,
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset.$$
4. *Para toda sucesión $C_1 \supseteq C_2 \supseteq C_3 \supseteq \cdots$ de subconjuntos cerrados no vacíos de X tal que* $\text{lím}_{n\to\infty} \text{diám}(C_n) = 0$, *existe $x \in X$ tal que*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}.$$

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tomemos un punto $x_n \in B_n$. Como el radio de B_n tiende a 0 cuando n tiende a infinito, la sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ es de Cauchy. Así, por hipótesis existe $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Es evidente que $x \in \overline{B_n} = B_n$ para todo n y, en consecuencia, $x \in \bigcap\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$.

2. $\Rightarrow$ 3. Elijamos $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tales que $\operatorname{diám}(C_{n_i}) \le 1/2^i$, y para cada $i \in \mathbb{N}$ tomemos $x_{n_i} \in C_{n_i}$. Es evidente que $C_{n_i} \subseteq \mathrm{B}_{1/2^i}[x_{n_i}]$, por lo tanto $x_{n_{i+1}} \in \mathrm{B}_{1/2^i}[x_{n_i}]$, para todo $i \in \mathbb{N}$. De esto se sigue facilmente que

$$\mathrm{B}_{1/2^i}[x_{n_{i+1}}]) \subseteq \mathrm{B}_{1/2^{i-1}}[x_{n_i}] \quad \text{para todo } i \in \mathbb{N},$$

Así, por hipótesis, existe $x \in \bigcap_i \mathrm{B}_{1/2^i}[x_{n_{i+1}}]$, y es claro que $x = \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$. Dado que $x_{n_{i+j}} \in C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ y todo $j \ge 0$ y que C_i es cerrado, se sigue que $x \in C_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, por lo que $x \in \bigcap\{C_i : i \in \mathbb{N}\}$.

3. $\Rightarrow$ 4. Porque $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diám}(C_n) = 0$.

4. $\Rightarrow$ 1. Fijemos una sucesión $x_1, x_2, x_3, \dots$ de elementos de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $C_n = \overline{\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}}$. Si $x_1, x_2, x_3, \dots$ es de Cauchy, entonces $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diám}(C_n) = 0$ y, en consecuencia,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \{x\}.$$

para algún $x \in X$. Es fácil ver que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Una función $f\colon Z \to X$, de un conjunto Z en un espacio métrico X, es *acotada* si $\operatorname{diám}(f(Z)) < \infty$. El conjunto $\mathrm{B}(Z, X) = \{f\colon Z \to X : f \text{ es acotada}\}$ es un espacio métrico via $d_\infty(f, g) = \sup_{z\in Z} d(f(z), g(z))$. Decimos que una sucesión de funciones $f_n \in \mathrm{B}(Z, X)$ es *uniformemente de Cauchy* si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathrm{B}(Z, X)$ y que *tiende uniformemente* a $f \in \mathrm{B}(Z, X)$ si tiende a f en $\mathrm{B}(Z, X)$. En este caso también escribimos

$$f_n \xrightarrow{\text{unif}} f \quad \text{o} \quad f = \lim_{\text{unif}} f_n.$$

Teorema 1.29. *Si X es completo, entonces $\mathrm{B}(Z, X)$ también lo es.*

Demostración. Por la definición de d_∞, si $f_1, f_2, \dots$ es una sucesión uniformemente de Cauchy de puntos de $\mathrm{B}(Z, X)$, entonces $f_1(z), f_2(z), \dots$ es una sucesión de Cauchy en X, y por lo tanto convergente, para cada $z \in Z$. Denotemos con $f\colon Z \to X$ a la función definida por

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z).$$

Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_n, f_m) < \epsilon$ siempre que $n, m \ge n_0$. En consecuencia, si $n \ge n_0$, entonces

$$d(f_n(z), f(z)) = \lim_{m\to\infty} d(f_n(z), f_m(z)) \le \epsilon,$$

para todo $z \in Z$. Así, f_n tiende a f uniformemente. Dejamos como ejercicio para el lector, probar que f es acotada. □

Para la demostración del corolario que sigue necesitamos introducir un concepto más. Una función $f\colon X \to X'$ es una *isometría* si $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in X$.

Corolario 1.30. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$*, donde d_∞ es la distancia introducida en el item 2 de los Ejemplos 1.1, es completo.*

Demostración. Porque $\mathbb{R}$ es completo y hay un isometría biyectiva evidente entre $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ y $(\mathrm{B}(\{1, \dots, n\}, \mathbb{R}), d_\infty)$ (esto justifica el uso del mismo símbolo para designar a las funciones distancia de ambos espacios). $\square$

Supongamos que Z también es un espacio métrico y denotemos con $\mathrm{C}(Z, X)$ a

$$\mathrm{C}(Z, X) = \{f \in \mathrm{B}(Z, X) : f \text{ es continua}\}.$$

Teorema 1.31. $\mathrm{C}(Z, X)$ *es cerrado en* $\mathrm{B}(Z, X)$*, y es, por lo tanto, completo.*

Demostración. Consideremos funciones $f_n \in \mathrm{C}(Z, X)$ y $f \in \mathrm{B}(Z, X)$, donde $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ y fijemos $z_0 \in Z$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(f_{n_0}, f) < \frac{\epsilon}{3}$. Como f_{n_0} es continua, existe $\delta > 0$ tal que $d(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z_0)) < \frac{\epsilon}{3}$ si $z \in \mathrm{B}_\delta(z_0)$. Así, para todo $z \in \mathrm{B}_\delta(z_0)$,

$$d(f(z), f(z_0)) \le d(f(z), f_{n_0}(z)) + d(f_{n_0}(z), f_{n_0}(z_0)) + d(f_{n_0}(z_0), f(z_0)) < \epsilon.$$

Como z_0 es arbitrario, esto prueba el teorema. $\square$

5.1. Completación Consideremos espacios métricos X y X'. Decimos que una función $f \colon X \to X'$ es *uniformemente continua* si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \epsilon$ siempre que $d(x, x') < \delta$. Por ejemplo, por el item 2 de la Observación 1.3, la función $d_z \colon X \to \mathbb{R}$, definida por $d_z(x) = d(x, z)$, donde z es un elemento fijado de X y d denota a la distancia en X, es uniformemente continua. Es evidente que toda isometría es uniformemente continua y toda función uniformemente continua es continua. La recíprocas de estos resultados no valen. Por ejemplo, la función $f \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, es continua pero no uniformemente continua, y la función $g \colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$, definida por $g(x) = 2x$, es uniformemente continua pero no es una isometría. Un resultado sencillo pero importante, es que toda función uniformemente continua transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.

Teorema 1.32. *Supongamos que $A \subseteq X$ es un conjunto denso y $f \colon A \to X'$ es una función continua (aquí estamos considerado a A con la métrica inducida por la de X). Los siguientes hechos valen:*

1. *Si $g \colon X \to X'$ y $h \colon X \to X'$ son funciones continuas que extienden a f (es decir tales que $g(x) = h(x) = f(x)$ para todo $x \in A$), entonces $g = h$.*
2. *Si f es uniformemente continua y X' es completo, entonces existe una función uniformemente continua $g \colon X \to X'$, que extiende a f. Además, si f es una isometría, entonces g también lo es.*

Demostración. 1. Denotemos con C a $\{x \in X : g(x) = h(x)\}$. Debemos probar que $C = X$. Para ello, como $A \subseteq C$ y $\overline{A} = X$, basta comprobar que C es cerrado, pero esto es una consecuencia inmediata de que si $x_1, x_2, \dots$ es una sucesión de puntos de C y $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, entonces $g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x)$.

2. Dado $x \in X$, tomemos una sucesión $x_1, x_2, \dots$ de puntos de A que tiende a x. Como f es uniformemente continua, la sucesión $f(x_1), f(x_2), \dots$ es de Cauchy y, por lo tanto, siendo X' completo, convergente. Definimos $g(x) = y$, donde $y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Debemos probar que esta definición no depende de la sucesión elegida. Supongamos que empezando con otra sucesión $x'_1, x'_2, \dots$ de puntos de A que tiende a x, obtenemos $y' = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Entonces la sucesión $f(x_1), f(x'_1), f(x_2), f(x'_2), \dots$ es convergente y tiene subsucesiones que convergen a y e y'. En consecuencia, $y = y'$. Para concluir la demostración, debemos probar que g extiende

a f, es uniformemente continua y es una isometría si f lo es. Si $x \in A$, entonces tomando $x_n = x$ para todo n, vemos que $g(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$. Esto prueba que lo primero es cierto. Además, como f es uniformemente continua, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \epsilon$ si $x, x' \in A$ y $d(x, x') < \delta$. Dados $\widetilde{x}, \widetilde{x}' \in X$ tales que $d(\widetilde{x}, \widetilde{x}') < \delta$, elijamos sucesiones $x_1, x_2, \dots$ y $x'_1, x'_2, \dots$ de puntos de A, tales que $\widetilde{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ y $\widetilde{x}' = \lim_{n\to\infty} x'_n$. Entonces $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n) = d(\widetilde{x}, \widetilde{x}') < \delta$, y así,

$$d(g(\widetilde{x}), g(\widetilde{x}')) = \lim_{n\to\infty} d(f(x_n), f(x'_n)) \le \epsilon.$$

Esto prueba que lo segundo también es cierto, y es evidente que lo es lo tercero. $\square$

Una *completación* de un espacio métrico X es un espacio métrico completo X', junto con una isometría $i\colon X \to X'$ tal que $i(X)$ es denso en X'. Notemos que por el item 1 del Teorema 1.32, la métrica de X' está determinada por la de X y por i. Esto también se deduce facilmente del siguiente teorema.

Teorema 1.33. *Todo espacio métrico X tiene una completación. Además, dadas completaciones (X'_1, i_1) y (X'_2, i_2), existe una única isometría biyectiva $f\colon X'_1 \to X'_2$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X'_2 \\ X'_1 \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Unicidad: Aplicando el Teorema 1.32 a las funciones

$$i_2 \circ i_1^{-1}\colon i_1(X) \to X'_2 \qquad \text{e} \qquad i_1 \circ i_2^{-1}\colon i_2(X) \to X'_1,$$

obtenemos isometrías $f\colon X'_1 \to X'_2$ y $g\colon X'_2 \to X'_1$, respectivamente. Como $i_1(X)$ es denso en X'_1 y $g \circ f_{|i_1(X)}\colon i_1(X) \to X'_1$ es la inclusión, $g \circ f = \mathrm{id}_{X'_1}$. Analogamente, $f \circ g = \mathrm{id}_{X'_2}$.

Existencia: Fijemos $a \in X$ y consideremos la función $i_a\colon X \to \mathrm{B}(X, \mathbb{R})$, definida por

$$i_a(x)(y) = d(x, y) - d(a, y).$$

La igualdad $|d(x, y) - d(a, y)| \le d(x, a)$ muestra que, efectivamente, $i_a(x)$ es acotada. Dado que

$$d_\infty(i_a(x), i_a(x')) = \sup_{y\in X} |i_a(x)(y) - i_a(x')(y)| = \sup_{y\in X} |d(x, y) - d(x', y)| \le d(x, x')$$

y

$$d_\infty(i_a(x), i_a(x')) \ge |i_a(x)(x) - i_a(x')(x)| = |d(x, x) - d(x', x)| = d(x, x'),$$

la función i_a es una isometría. Es claro ahora que $(\overline{i_a(X)}, i_a)$ es una completación de X. $\square$

6. Métricas Equivalentes

Decimos que dos métricas d_1 y d_2 de un conjunto X son *topológicamente equivalentes* y escribimos $d_1 \sim d_2$ si (X, d_1) y (X, d_2) tienen los mismos abiertos, o lo que es igual, si la función identidad $\mathrm{id}\colon (X, d_1) \to (X, d_2)$ es un homeomorfismo, y que d_1 y d_2 son *uniformemente equivalentes*, si la función id_X es uniformemente continua cuando consideramos al dominio provisto de la métrica d_1 y al codominio de la métrica d_2, y cuando consideramos al dominio con la métrica d_2 y al codominio con la métrica d_1. Señalamos este hecho escribiendo $d_1 \overset{u}{\sim} d_2$.

OBSERVACIÓN 1.34. *Las relaciones* $\sim$ *y* $\overset{u}{\sim}$ *son de equivalencia.*

OBSERVACIÓN 1.35. *Si d_1 y d_2 son métricas uniformemente equivalentes de X, entonces (X, d_1) y (X, d_2) tienen las mismas sucesiones de Cauchy. En consecuencia, uno es completo si y sólo si el otro lo es.*

EJERCICIO 1.36. *Pruebe que dos métricas d_1 y d_2 de un conjunto X son topológicamente equivalentes si y sólo si para cada $x \in X$ y cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta^{d_1}(x) \subseteq B_\epsilon^{d_2}(x) \quad y \quad B_\delta^{d_2}(x) \subseteq B_\epsilon^{d_1}(x).$$

EJERCICIO 1.37. *Pruebe que dos métricas d_1 y d_2 de un conjunto X son uniformemente equivalentes si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que*

$$B_\delta^{d_1}(x) \subseteq B_\epsilon^{d_2}(x) \quad y \quad B_\delta^{d_2}(x) \subseteq B_\epsilon^{d_1}(x).$$

para todo $x \in X$.

EJERCICIO 1.38. *Pruebe que en $\mathbb{R}^n$ todas las distancias d_p $(1 \le p \le \infty)$, introducidas en los items 1 y 2 de los Ejemplos 1.2, son uniformemente equivalentes. Concluya que $\mathbb{R}^n$ es completo con cada una de ellas.*

7. El Teorema del Punto Fijo para Contracciones

Una función $f\colon X \to X$ es una *contracción* si existe $0 < k < 1$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \le k d(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in X.$$

Es claro que toda contracción es uniformemente continua.

TEOREMA 1.39 (Teorema del punto fijo para contracciones). *Si (X, d) es un espacio métrico completo, entonces toda contracción $f\colon X \to X$ tiene un único punto fijo.*

DEMOSTRACIÓN. Unicidad: Si $f(x) = x$ y $f(y) = y$, entonces $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$. Como $k \neq 1$, esto implica que $x = y$.
Existencia: Elijamos $x_0 \in X$ y consideremos la sucesión $x_0, x_1, x_2 \dots$, donde $x_n = f^n(x_0)$. Como f es una contracción, para todo $m \ge n$,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= d(f^n(x_0), f^m(x_0)) \\ &\le k^n d(x_0, f^{m-n}(x_0)) \\ &\le k^n \sum_{i=0}^{m-n-1} d(f^i(x_0), f^{i+1}(x_0)) \\ &\le k^n \left(\sum_{i=0}^{m-n-1} k^i \right) d(x_0, f(x_0)) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, f(x_0)).$$

En consecuencia, como k^n tiende a 0 cuando n tiende a infinito, $x_0, x_1, x_2, \ldots$ es de Cauchy. Escribamos $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Entonces

$$f(x)) = f(\lim_{n\to\infty} f^n(x_0)) = \lim_{n\to\infty} f^{n+1}(x_0)) = x.$$

lo que termina la prueba. $\square$

Nota 1.40. *La demostración no sólo prueba que el punto fijo existe, al mostrar que para todo $x \in X$ la sucesión*

$$x, f(x), f^2(x), f^3(x), \ldots, f^n(x), \ldots$$

converge al punto fijo de X, también da un método para aproximarlo con precisión arbitraria.

Ejemplo 1.41. *Dada una matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

y un vector columna $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, consideremos la aplicación

$$T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

definida por $T(\vec{x}) := A\vec{x} + \vec{b}$ para cada vector columna $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$. Queremos encontrar condiciones para que T sea una contracción. Esto depende de la métrica que le demos a $\mathbb{R}^m$. Con la métrica d_∞ obtenemos

$$\begin{aligned} d_\infty(T(\vec{x}), T(\vec{y})) &= \max_i \left| \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - y_j) \right| \\ &\leq \max_i \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}||x_j - y_j| \right) \\ &\leq \max_i \left(\sum_{j=1}^m |a_{ij}| \right) d_\infty(\vec{x}, \vec{y}), \end{aligned}$$

donde $x_1, \ldots, x_m$ e $y_1, \ldots, y_m$ denotan a las coordenadas de $\vec{x}$ y $\vec{y}$, respectivamente. Esto nos da la condición

$$\sum_{j=1}^m |a_{ij}| < 1 \quad \textit{para } 1 \leq i \leq 1.$$

Con la métrica d_1, obtenemos

$$\begin{aligned}
d_1(T(\vec{x}),T(\vec{y})) &= \sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x_j-y_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}||x_j-y_j| \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}||x_j-y_j| \\
&\leq \max_j\left(\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|\right) d_1(\vec{x},\vec{y}),
\end{aligned}$$

lo que da la condición

$$\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|<1 \quad \textit{para } 1\leq j\leq m.$$

Finalmente, si usamos la métrica d_p con $1<p<\infty$, entonces por la desigualdad de Holder

$$\begin{aligned}
d_p(T(\vec{x}),T(\vec{y}))^p &= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(x_j-y_j)\right)^p \\
&\leq \sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt[q]{\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^q}\sqrt[p]{\sum_{j=1}^{m}|x_j-y_j|^p}\right)^p \\
&= \sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt[q]{\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^q}\right)^p d_p(\vec{x},\vec{y})^p,
\end{aligned}$$

donde $1<q<\infty$ está definido por la igualdad $1/p+1/q=1$. Así, usando esta métrica obtenemos la condición

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\sqrt[q]{\sum_{j=1}^{m}|a_{ij}|^q}\right)^p<1,$$

la cual para $p=2$ se transforma en $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}^2<1$. En consecuencia, bajo cualquiera de estas condiciones la ecuación $T(\vec{x})=\vec{x}$ tiene una solución única $\vec{x}_0$. Además, $\lim_{n\to\infty} T^n(\vec{x})=\vec{x}_0$, para todo $\vec{x}\in\mathbb{R}^m$.

EJEMPLO 1.42. *Ahora probaremos un famoso teorema de Picard acerca de la existencia y unicidad de las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales. En el proceso usaremos libremente el concepto de derivada e integral de funciones vectoriales de variable real. Además, dado $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ escribiremos $\|\vec{x}\|_\infty$ en lugar de $d_\infty(\vec{x},0)$. Supongamos que tenemos una ecuación diferencial*

$$\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{f}(x,\vec{y}),$$

donde $\vec{f}\colon U \to \mathbb{R}^n$ *es una función continua definida en un abierto* U *de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$*. Si existe un* $M \geq 0$ *tal que* $\vec{f}$ *satisface la siguiente condición de Lipschitz con respecto a* $\vec{y}$*:*

$$d_\infty\big(\vec{f}(x,\vec{y}_1),\vec{f}(x,\vec{y}_2)\big) \leq M d_\infty(\vec{y}_1,\vec{y}_2) \quad \textit{para todo } (x,\vec{y}_1) \textit{ y } (x,\vec{y}_2) \textit{ en } U,$$

entonces para cada $(x_0,\vec{y}_0) \in U$ *existe un segmento* $[x_0-d,x_0+d]$ *y una única función diferenciable* $\vec{\varphi}\colon [x_0-d,x_0+d] \to \mathbb{R}^n$*, cuyo gráfico pasa por* $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$*, tal que*

$$(x,\vec{\varphi}(x)) \in U \quad \textit{y} \quad \frac{d\vec{\varphi}}{dx}(x) = \vec{f}(x,\vec{\varphi}(x)) \qquad \textit{para todo } x \in [x_0-d,x_0+d],$$

o, equivalentemente, tal que $(x,\vec{\varphi}(x)) \in U$ *para todo* $x \in [x_0-d,x_0+d]$ *y*

$$\vec{\varphi}(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))\,dt. \tag{5}$$

En efecto, como $\vec{f}$ *es continua existen* $K \geq 0$ *y un entorno abierto* V *de* $(x_0,\vec{y}_0)$ *incluído en* U*, tal que* $\|\vec{f}(x,\vec{y})\|_\infty \leq K$ *para todo* $(x,\vec{y}) \in V$*. Elijamos* $d>0$ *tal que*

- *Si* $|x-x_0| \leq d$ *y* $d_\infty(\vec{y},\vec{y}_0) \leq Kd$*, entonces* $(x,\vec{y}) \in V$*,*
- $Md < 1$*.*

Denotemos con C^* *al espacio de las funciones continuas* $\varphi\colon [x_0-d,x_0+d] \to \mathbb{R}^n$ *tales que* $d_\infty\big(\vec{\varphi}(x),\vec{y}_0\big) \leq Kd$ *para todo* $x \in [x_0-d,x_0+d]$*, dotado de la métrica*

$$d_\infty(\vec{\varphi}_1,\vec{\varphi}_2) = \max_{x\in[x_0-d,x_0+d]} d_\infty\big(\vec{\varphi}_1(x),\vec{\varphi}_2(x)\big).$$

Es fácil ver que C^* *es un subespacio cerrado del espacio de las funciones continuas y acotadas* $C([x_0-d,x_0+d],\mathbb{R}^n)$*, donde a* $\mathbb{R}^n$ *lo consideramos provisto de la métrica* d_∞ *y que, por lo tanto, es completo. Consideremos la aplicación* $A\colon C^* \to C([x_0-d,x_0+d],\mathbb{R}^n)$*, definida por*

$$A(\vec{\varphi})(x) = \vec{y}_0 + \int_{x_0}^{x} \vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))\,dt.$$

Dado que

$$d_\infty\big(A(\vec{\varphi})(x),\vec{y}_0\big) = \left\|\int_{x_0}^{x} \vec{f}(t,\vec{\varphi}(t))\,dt\right\|_\infty \leq K|x-x_0|,$$

la imagen de A *cae dentro de* C^**. Además* A *es una contracción, ya que*

$$d_\infty\big(A(\varphi_1)(x),A(\varphi_2)(x)\big) = \left\|\int_{x_0}^{x} \big(\vec{f}(t,\vec{\varphi}_1(t)) - f(t,\vec{\varphi}_2(t))\big)\,dt\right\|_\infty \leq Md d_\infty(\varphi_1,\varphi_2),$$

para todo $x \in [x_0-d,x_0+d]$ *y* $Md<1$*. En consecuencia, por el Teorema del punto fijo para contracciones, la ecuación integral* (5) *tiene solución única.*

El siguiente resultado generaliza el Teorema 1.39.

Teorema 1.43. *Si* (X,d) *es un espacio métrico completo y* $f\colon X\to X$ *es una aplicación continua tal que* f^{n_0} *es una contración para algún* $n_0 \in \mathbb{N}$*, entonces* f *tiene un único punto fijo.*

Demostración. La unicidad se sigue del Teorema 1.39 y de que todo punto fijo de f es también un punto fijo de f^{n_0}. Veamos la existencia. Tomemos $x_0 \in X$ arbitrario. Como f^{n_0} es una contracción existe $x := \lim_{m\to\infty} f^{mn_0}(x_0)$. Afirmamos que $f(x)=x$. En efecto, dado que f es continua, $f(x) = \lim_{m\to\infty} f^{mn_0}(f(x_0))$ y dado que f^{n_0} es una contracción, existe $0 \leq k < 1$ tal que

$$d(f^{mn_0}(f(x_0)),f^{mn_0}(x_0)) \leq k^m d(f^{n_0}(x_0),x_0).$$

Así,

$$d(f(x),x) = \lim_{m\to\infty} d(f^{mn_0}(f(x_0)), f^{mn_0}(x_0)) = \lim_{m\to\infty} k^m d(f^{n_0}(x_0), x_0) = 0$$

y, por lo tanto, $f(x) = x$. También podríamos haber argumentado así: por la Nota 1.40 sabemos que

$$x = \lim_{m\to\infty} f^{mn_0}(x_0) \quad \text{y} \quad f(x) = \lim_{m\to\infty} f^{mn_0}(f(x_0))$$

son puntos fijos de f^{n_0}. Pero f^{n_0} tiene un único punto fijo. Así, $f(x) = x$. □

Ejemplo 1.44. *Dado un intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, consideremos el subconjunto T de $[a,b]\times[a,b]$ formado por los puntos (x,y) con $y \le x$, y fijemos una función continua $K\colon T\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, llamada núcleo, y una función continua $\varphi\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Vamos a probar que si K satisface la siguiente condición de Lipschitz con respecto a la tercera variable:*

$$|K(x,y,z_1) - K(x,y,z_2)| \le M|z_1 - z_2| \quad \textit{para todo } (x,y,z_1) \textit{ y } (x,y,z_2) \textit{ en } T\times\mathbb{R},$$

entonces la ecuación integral

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x,y,f(y))\,dy + \varphi(x), \tag{6}$$

donde $\lambda\in\mathbb{R}$ es arbitrario, tiene una única solución continua $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$. Para ello consideremos la aplicación

$$A\colon C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R}),$$

definida por

$$A(f)(x) = \int_a^x K(x,y,f(y))\,dy + \varphi(x).$$

Afirmamos que

$$d(A^n(f_1)(x), A^n(f_2)(x)) \le |\lambda|^n M^n \frac{(x-a)^n}{n!} d_\infty(f_1,f_2) \quad \textit{para todo } x\in[a,b].$$

En efecto, el caso $n=0$ es trivial, y suponiendo que el resultado vale para n obtenemos

$$\begin{aligned}
d(A^{n+1}(f_1)(x), A^{n+1}(f_2)(x)) &= |\lambda| \left\| \int_a^x \big(K(x,y,A^n(f_1)(y)) - K(x,y,A^n(f_2)(y))\big)\,dy \right\|_\infty \\
&\le |\lambda| \sup_{x\in[a,b]} \int_a^x |K(x,y,A^n(f_1)(y)) - K(x,y,A^n(f_2)(y))|\,dy \\
&\le |\lambda| \int_a^x M|A^n(f_1)(y)) - A^n(f_2)(y))|\,dy \\
&\le |\lambda| M \int_a^x |\lambda|^n M^n \frac{(y-a)^n}{n!} d_\infty(f_1,f_2)\,dy \\
&= |\lambda|^{n+1} M^{n+1} d_\infty(f_1,f_2) \int_a^x \frac{(y-a)^n}{n!}\,dy \\
&= |\lambda|^{n+1} M^{n+1} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} d_\infty(f_1,f_2).
\end{aligned}$$

Pero entonces

$$d_\infty(A^n(f_1), A^n(f_2)) \le |\lambda|^n M^n \frac{(b-a)^n}{n!} d_\infty(f_1,f_2).$$

Esto prueba que A es uniformemente continua y A^n es una contracción para n suficientemente grande. En consecuencia, por el Teorema 1.43, la ecuación integral (6) *tiene una única solución continua.*

8. Conjuntos de Primera y Segunda Categoría

TEOREMA 1.45 (Teorema de Baire). *Si X es un espacio métrico completo y $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia numerable de cerrados de X con interior vacío, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ tiene interior vacío.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos lo contrario y tomemos un abierto U de X incluído en $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$. Como el interior de C_1 es vacío, existe $x_1 \in U \setminus C_1$. Como $U \setminus C_1$ es abierto, hay una bola cerrada $\overline{B}_{r_1}(x_1)$ tal que $\overline{B}_{r_1}(x_1) \subseteq U$ y $C_1 \cap \overline{B}_{r_1}(x_1) = \emptyset$. Podemos suponer además que $r_1 < 1$. El mismo argumento prueba que hay una bola cerrada $\overline{B}_{r_2}(x_2)$, de radio menor que $1/2$, tal que $\overline{B}_{r_2}(x_2) \subseteq \overline{B}_{r_1}(x_1)$ y $C_2 \cap \overline{B}_{r_2}(x_2) = \emptyset$. Siguiendo con este procedimiento obtenemos una sucesión de bolas cerradas

$$\overline{B}_{r_1}(x_1), \overline{B}_{r_2}(x_2), \overline{B}_{r_3}(x_3), \overline{B}_{r_4}(x_4), \dots,$$

cada una incluída en la anterior, cuyos radios tienden a cero y tales que $C_i \cap \overline{B}_i = \emptyset$. Por el Teorema 1.28, la intersección $\bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{B}_i$ contiene un punto x, que no puede estar en ningún C_i. Pero como $\overline{B}_1 \subseteq U \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, esto es imposible. □

Tomando complementos obtenemos la siguiente versión del Teorema de Baire

TEOREMA 1.46. *Si X es un espacio métrico completo y $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de abiertos densos de X, entonces $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ es denso.*

Notemos que esto es una variación del siguiente resultado elemental que vale en todo espacio métrico.

OBSERVACIÓN 1.47. *Si $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ son abiertos densos, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ es denso.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos un abierto V de X. Como U_1 es denso, $V \cap U_1 \neq \emptyset$. Como U_2 es denso, $V \cap U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, etcetera. □

Un subconjunto A de X es de *primera categoría* si existe una familia numerable de conjuntos A_i con $\overline{A_i}^{\circ} = \emptyset$, tales que $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. En caso contrario A es de *segunda categoría.*

TEOREMA 1.48. *Si X es completo y $A \subseteq X$ es de primera categoría, entonces $A^{\circ} = \emptyset$.*

DEMOSTRACIÓN. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 1.45. □

TEOREMA 1.49. *Si $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es una familia de cerrados de un espacio métrico completo X y U es un abierto de X que corta al interior de $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$, entonces U corta a $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^{\circ}$. Dicho de otra forma,*

$$U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^{\circ} \neq \emptyset \Rightarrow U \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^{\circ} \neq \emptyset.$$

En consecuencia, si el interior de $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ es denso, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i^{\circ}$ también lo es.

Demostración. Debemos probar que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $U \cap C_n^\circ \neq \emptyset$. Como U es abierto, $U \cap (\bigcup_{i=1}^\infty C_i)^\circ \neq \emptyset$ y

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}(\overline{U} \cap C_i) = \overline{U} \cap \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \supseteq U \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right)^\circ,$$

el interior de $\bigcup_{i=1}^\infty(\overline{U} \cap C_i)$ es no vacío. En consecuencia, por el Teorema 1.45, existe n tal que $(\overline{U} \cap C_n)^\circ \neq \emptyset$. Pero entonces

$$U \cap C_n^\circ \supseteq U \cap (\overline{U} \cap C_n)^\circ \neq \emptyset,$$

donde la última desigualdad vale porque U es denso en $\overline{U}$ y $(\overline{U} \cap C_n)^\circ$, es un abierto no vacío de $\overline{U}$. □

8.1. Aplicaciones En esta subsección damos una pocas aplicaciones del Teorema de Baire. Muchas más pueden encontrarse en el libro “El Teorema de Categoría de Baire y Aplicaciones” de Wilman Brito.

8.1.1. Puntos aislados Recordemos que un punto x de un espacio métrico X es aislado si existe $r > 0$ tal que $B_r(x) = \{x\}$. Esto es, si $\{x\}$ es un abierto de X. Dado un subconjunto A de un espacio métrico X, denotemos con $\mathrm{ais}_X(A)$ al subconjunto de A formado por los puntos aislados de X que están en A.

Proposición 1.50. *Si V es un abierto numerable de un espacio métrico completo X, entonces $U \cap V \subseteq \overline{\mathrm{ais}_X(U \cap V)}$, para cada abierto U de X. En particular $V \subseteq \overline{\mathrm{ais}_X(V)}$ y, por lo tanto, $\mathrm{ais}_X(V)$ es infinito y tiene la misma adherencia que V.*

Demostración. Supongamos que $(U \cap V) \setminus \overline{\mathrm{ais}_X(U \cap V)}$ es no vacío. Entonces es finito y todos sus puntos son aislados, o es infinito numerable, y por el Teorema 1.45 también tiene puntos aislados, pero esto evidentemente es absurdo. □

Corolario 1.51. *Si X es un espacio métrico completo con finitos puntos aislados, entonces X no es numerable (aunque puede ser finito).*

8.1.2. Funciones continuas sin derivada en ningún punto Durante mucho tiempo se discutión si existían funciones continuas sin derivadas. Por ejemplo, Lagrange creía que toda función continua era derivable salvo posiblemente en un conjunto pequeño de puntos, pero Riemman pensaba que existían funciones reales continuas de variable real no derivables, y propuso un ejemplo, que resultó ser falso. El primer ejemplo de una función continua sin derivada en ningún punto publicado en una revista de matemática con referato fue dado por Weierstrass, pero parece haber uno anterior debido a Bolzano. Para más detalles ver el libro de Brito mencionado arriba. Aplicando el Teorema de Baire es posible probar que las funciones continuas sin derivada no sólo existen sino que son la mayoría.

Una función continua $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es *lineal a trozos* si existe una partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a,b]$ tal que la restricción de g a $[x_i, x_{i+1}]$ es una función lineal

$$g(x) = \alpha_i x + \beta_i \qquad \text{para todo } i.$$

El siguiente resultado es interesante en si mismo.

Proposición 1.52. *El conjunto de las funciones lineales a trozos de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$ es denso en $\big(C([a,b],\mathbb{R}), d_\infty\big)$.*

Demostración. Fijemos $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Debemos probar que para todo $\epsilon > 0$ la bola $B_\epsilon(f)$ contiene función lineal a trozos $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x')| < \epsilon/2$ siempre que $|x - x'| < \delta$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ mayor que $(b-a)/\delta$, y consideremos la partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a,b]$, donde $x_i = a + i(b-a)/n$. Afirmamos que la única función $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ que coincide con f en cada punto de la partición y es lineal en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, pertenece a $B_\epsilon(f)$. En efecto, por la desigualdad triangular,

$$|g(x) - f(x)| \le |g(x) - g(x_i)| + |g(x_i) - f(x)| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon,$$

para todo $x \in [a,b]$, donde x_i es el punto de la partición más cercano a f. □

Por definición, la *máxima pendiente* $MP(f,x)$, de una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ en un punto $x \in [a,b]$, es el supremo

$$\operatorname{Sup}\left\{\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| : x + h \in [a,b]\right\}.$$

Observación 1.53. *Si $MP(f,x) > MP(g,x)$, entonces*

$$MP(f+g,x) \ge MP(f,x) - MP(g,x),$$

porque

$$\begin{aligned}\left|\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h}\right| &= \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right|\\ &\ge \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| - \left|\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right|\\ &\ge \left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| - MP(g,x)\end{aligned}$$

para todo h.

Lema 1.54. *Para todo $M, N \in (0,\infty)$ existe $h \in C([a,b],\mathbb{R})$ tal que $d_\infty(h,0) \le M$ y $MP(h,x) > N$ para todo x.*

Demostración. consideremos la partición

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

de $[a,b]$, donde $x_i = a + i(b-a)/n$. La función continua $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, lineal en cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$, definida por

$$h(x_i) = \begin{cases} M & \text{si } i \text{ es par,}\\ -M & \text{si } i \text{ es impar,}\end{cases}$$

satisface las condiciones pedidas si $n \ge \frac{N(b-a)}{2M}$. □

Teorema 1.55. *El conjunto de las funciones continuas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivables algún punto es de primera categoría en $\big(C([a,b],\mathcal{R}), d_\infty\big)$.*

Demostración. Consideremos los conjuntos

$$C_n := \{f \in C([a,b],\mathcal{R}) : MP(f,x) \leq n \text{ para algún x}\},$$

donde n varía sobre los números naturales. Como la unión de los C_n incluye a todas las funciones derivables en algún punto, para terminar la demostración bastará probar que cada C_n es cerrado con interior vacío.

$\mathbf{C_n}$ es cerrado. Por la misma definición de C_n, dada una sucesión

$$f_1, f_2, f_3, \dots, f_i, \dots$$

de puntos de C_n que tiende uniformemente a una función $f\colon [a,b] \to \mathcal{R}$, existe una sucesión

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots \tag{7}$$

de puntos de $[a,b]$ tales que $MP(f_i, x_i) < n$ para todo i. Como $[a,b]$ es acotado, (7) tiene una subsucesión convergente

$$x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, \dots, x_{i_j}, \dots$$

Digamos que x es su límite. Dado h tal que $x + h \in [a,b]$, exite una sucesión $(h_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que tiende a h, tal que $x_{i_j} + h_j \in [a,b]$ para todo j. Como h es arbitrario, la igualdad

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = \lim_{j\to\infty}\left|\frac{f_j(x_{i_j}+h_j)-f(x_{i_j})}{h_j}\right| \leq n,$$

prueba que $MP(f,x) \leq n$. Así, $f \in C_n$.

$\mathbf{C_n}$ tiene interior vacío. Debemos probar que cada bola abierta $B_r(f)$ con centro en una función continua arbitraria f, tiene puntos que no están en C_n. Por la Proposición 1.52, sabemos que hay una función lineal a trozos $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ a distancia menor que $r/2$ de f. Como forman un conjunto finito, los módulos de las pendientes de los trozos lineales de g están acotados por un número natural m. Por el Lema 1.54, sabemos que existe una función continua $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ con $|h(x)| \leq r/2$ y $MP(h,x) > m+n$ para todo x. Por la desigualdad triangular la función $g+h$ pertenece a $B_r(f)$ y la Observación 1.53 muestra que está fuera de C_n. □

8.1.3. Principio de acotación uniforme Consideremos una familia $(f_i)_{i\in I}$ de funciones continuas de un espacio métrico completo X en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos con C_n al conjunto de los $x \in X$ tales que $|f_i(x)| \leq n$ para todo $i \in I$. Notemos que C_n es cerrado porque $C_n = \bigcap_{i\in I} f_i^{-1}([-n,n])$, y que

$$\{x \in X : \sup_{i\in I} |f_i(x)| = \infty\} = X \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Teorema 1.56 (Principio de acotación uniforme). *Si $\{x \in X : \sup_{i\in I}|f_i(x)| = \infty\}$ no es denso, entonces hay un abierto no vacío $U \subseteq X$ y un $m \geq 0$ tal que $|f_i(x)| \leq m$ para todo $i \in I$ y todo $x \in U$.*

Demostración. La hipótesis dice que hay un abierto no vacío V de X tal que

$$V \cap \{x \in X : \sup_{i\in I}|f_i(x)| = \infty\} = \emptyset,$$

o, lo que es igual,

$$V \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n.$$

Pero entonces por el Teorema 1.45 existe m tal que $C_m^\circ \neq \emptyset$. Así, podemos tomar $U = C_m^\circ$. □

Observación 1.57. *En realidad vale un resultado más fuerte. Por et Teorema 1.49, si* V *es un abierto de* X *que corta a* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$*, entonces existe un abierto no vacío* $U \subseteq V$ *y un* $m \geq 0$ *tal que* $|f_i(x)| \leq m$ *para todo* $i \in I$ *y todo* $x \in U$*.*

9. Compaccidad (Primera Parte)

Una familia $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de subconjunto de un espacio métrico X es un *cubrimiento* de X si $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. Un cubrimiento de X es *abierto* si sus miembros son abiertos. Un espacio métrico X es *compacto* si todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento finito. Un conjunto $Y \subseteq X$ es *compacto*, si lo es con la métrica inducida. Como todo abierto de Y es la intersección de Y con un abierto de X, esto ocurre si y sólo si cada cubrimiento

$$Y \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda,$$

de Y por abiertos de X, tiene un subcubrimiento finito. Usando las leyes de De Morgan se comprueba inmediatamente que un espacio métrico X es compacto si y sólo si toda familia de cerrados de X con intersección vacía tiene una subfamilia finita con intersección vacía. Un subconjunto A de un espacio métrico X es *totalmente acotado* si para todo $\epsilon > 0$, existen $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ y subconjuntos $M_1, \dots, M_{n_\epsilon}$ de X tales que $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} M_i$ y $\operatorname{diám}(M_i) \leq \epsilon$ para todo i.

Proposición 1.58. *Para cada conjunto* A *de un espacio métrico* X*, las afirmaciones que siguen son verdaderas:*

1. *A es totalmente acotado si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existen finitos puntos $x_1, \dots, x_{n_\epsilon}$ en A tal que* $\min\{d(x, x_i) : 1 \leq i \leq n_\epsilon\} < \epsilon$ *para todo $x \in A$. En otras palabras, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} B_\epsilon(x_i)$.*
2. *Si $A \subseteq B \subseteq X$ y B es totalmente acotado, entonces A también lo es.*
3. *Si A es totalmente acotado, entonces $\overline{A}$ también lo es.*
4. *Si A es totalmente acotado, entonces A es acotado.*
5. *Si A no es totalmente acotado, entonces existen $\epsilon > 0$ y una familia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de puntos de A tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ para todo i, j.*

Demostración. Es claro que los items 1), 2) y 4) son ciertos. El item 3) vale porque el diámetro de un conjunto es igual al de su adherencia y

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} M_i \Rightarrow \overline{A} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_\epsilon} \overline{M_i}.$$

Para probar que vale el item 5), notemos que si la condición establecida en el item 3) es falsa para algún $\epsilon > 0$, entonces dado un punto arbitrario x_1 de A, existe $x_2 \in A \setminus B_\epsilon(x_1)$, porque $A \subsetneq B_\epsilon(x_1)$; existe $x_3 \in A \setminus (B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2))$, porque $A \subsetneq B_\epsilon(x_1) \cup B_\epsilon(x_2)$, etcétera. La familia $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construída de este modo satisface la condición pedida en el enunciado. $\square$

Lema 1.59. *Consideremos un cubrimiento abierto* $(U_i)_{i\in I}$ *de un espacio métrico totalmente acotado* X*. Si* X *no es cubierto por ninguna subfamilia finita de* $(U_i)_{i\in I}$*, entonces para todo* $\epsilon > 0$ *hay una bola cerrada* $\mathrm{B}_\epsilon[x]$ *que no es cubierta por ninguna subfamilia finita de* $(U_i)_{i\in I}$*.*

Demostración. Como X es totalmente acotado existen puntos $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_\epsilon[x_i]$. Si todas estas bolas cerradas fueran cubiertas por subfamilias finitas de $(U_i)_{i\in I}$, entonces X también lo sería. $\square$

TEOREMA 1.60. *Para todo espacio métrico X son equivalentes:*

1. *X es compacto.*
2. *$A' \neq \emptyset$ para todo subconjunto infinito A de X.*
3. *Toda sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de puntos de X tiene una subsucesión convergente.*
4. *X es totalmente acotado y completo.*

DEMOSTRACIÓN. 1. $\Rightarrow$ 2. Supongamos que $A' = \emptyset$ para algún subconjunto infinito A de X. Entonces A es cerrado y cada $x \in A$ es el centro de una bola abierta $\mathrm{B}_{\epsilon_x}(x)$ tal que $\mathrm{B}_{\epsilon_x}(x) \cap A$ es finito. Así, $X = (X \setminus A) \cup \left(\bigcup_{x \in A} \mathrm{B}_{\epsilon_x}(x)\right)$ es un cubrimiento abierto de X que no tiene ningún subcubrimiento finito.

2. $\Rightarrow$ 3. Es claro que si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto finito, entonces $x_1, x_2, \dots$ tiene una subsucesión convergente. Si $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es infinito, entonces tiene un punto de acumulación x, lo cual nos permite construír una subsucesión $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ que tiende a x, simplemente tomando $x_{n_{i+1}} \in \mathrm{B}_{\frac{1}{i+1}}(x) \cap \{x_{n_i+1}, x_{n_i+2}, \dots\}$.

3. $\Rightarrow$ 4. Por el Teorema 1.26, sabemos que X es completo. Veamos que es totalmente acotado. Si no lo fuera, existirían $\epsilon > 0$ y una sucesión $x_1, x_2, \dots$ de puntos de X tal que $d(x_i, x_j) \geq \epsilon$ si $i \neq j$. Es obvio que esta sucesión no tiene ninguna subsucesión convergente.

4. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que X tuviera un cubrimiento abierto $(U_i)_{i \in I}$ sin ningún subcubrimiento finito. Usando el Lema 1.59 obtenemos bolas cerradas $\overline{\mathrm{B}_1} \supseteq \overline{\mathrm{B}_2} \supseteq \overline{\mathrm{B}_3} \supseteq \cdots$, ninguna de las cuales es cubierta por una subfamilia finita de $(U_i)_{i \in I}$ y tales que diám$(\overline{\mathrm{B}_n}) < \frac{1}{n}$. Como X es completo, $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\mathrm{B}_n} = \{x\}$ para un $x \in X$. Tomemos U_i tal que $x \in U_i$. Es claro que $\overline{\mathrm{B}_j} \subseteq U_i$ para algún j, lo que es absurdo. $\square$

COROLARIO 1.61. *Todo espacio métrico compacto X es separable.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema anterior, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un conjunto finito de puntos F_n en X tal que $B_{1/n}(x) \cap F_n \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Es claro que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ es denso y numerable. $\square$

TEOREMA 1.62. *Para todo subconjunto C de X es verdad que:*

1. *Si C es compacto, entonces es cerrado.*
2. *Si X es compacto y C es cerrado, entonces C es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. 1. Esto se sigue inmediatamente de la Proposición 1.27 y el Teorema 1.60. A continuación damos una demostración más directa. Debemos probar que $x_0 \notin \overline{C}$ para ningún $x_0 \in X \setminus C$. Para cada $x \in C$, hay bolas abiertas disjuntas $\mathrm{B}_{\epsilon_x}(x)$ y $\mathrm{B}_{\epsilon_x}(x_0)$ y, por hipótesis, existen $x_1, \dots, x_n \in C$ tales que $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{\epsilon_{x_i}}(x_i)$. Es evidente que $\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{\epsilon_{x_i}}(x_0)$ es un entorno de x_0 que no corta a C.

2. Tomemos un cubrimiento $(U_i)_{i \in I}$ de C por abiertos de X. Como X es compacto y C es cerrado, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $X = (\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}) \cup (X \setminus C)$ y así $C \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$. $\square$

TEOREMA 1.63. *Toda sucesión $y_1, y_2, y_3, \dots$ de puntos de un conjunto totalmente ordenado Y, tiene una subsucesión creciente o una subsucesión decreciente.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $y_1, y_2, \dots$ no tiene ninguna subsucesión creciente. Entonces el conjunto $F = \{n : y_n > y_i \text{ para todo } i > n\}$ es infinito. Si $F = \{i_1 < i_2 < \dots\}$, entonces $y_{i_1} > y_{i_2} > y_{i_3} > \cdots$. $\square$

En el lema y teorema que siguen $\mathbb{R}^n$ es pensado como un espacio métrico via la distancia d_∞. Debido al Ejercicio 1.38, si cambiáramos d_∞ por cualquier otra de las distancias introducidas en los Ejemplos 1.1, obtendríamos los mismos resultados.

LEMA 1.64. *El producto $I = I_1 \times \cdots \times I_n$ de una familia finita de intervalos cerrados y acotados de $\mathbb{R}$ es compacto.*

DEMOSTRACIÓN. Para $n = 1$ esto se sigue del Teorema 1.63. En efecto, por este teorema toda sucesión de puntos de $[a, b]$ tiene una subsucesión monótona, la cual, siendo acotada, converge. Supongamos ahora que el resultado vale cuando $n = m$ y que $n = m + 1$. Consideremos una sucesión $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \dots,$ de puntos de I. Escribamos $\mathbf{x}^\mathbf{i} = (x^i_1, \dots, x^i_{m+1})$. Por hipótesis inductiva hay una subsucesión $\mathbf{x}^{i_1}, \mathbf{x}^{i_2}, \mathbf{x}^{i_3}, \dots$ de $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \mathbf{x}^3, \dots$ tal que, para cada j con $1 \le j \le m$, la sucesión de números reales $x^{i_1}_j, x^{i_2}_j, x^{i_3}_j, \dots$ converge. Tomando ahora una subsucesión adecuada de $\mathbf{x}^{i_1}, \mathbf{x}^{i_2}, \mathbf{x}^{i_3}, \dots,$ podemos conseguir que la sucesión de números reales formada por las últimas coordenadas, sea también convergente. $\square$

TEOREMA 1.65. *$C \subseteq \mathbb{R}_n$ es compacto si y sólo si es cerrado y acotado*

DEMOSTRACIÓN. si C es compacto, entonces por el item 4 de la Proposición 1.58 y los Teoremas 1.60 y 1.62, es cerrado y acotado. Recíprocamente, si C es cerrado y acotado, entonces es un subconjunto cerrado de un cubo $I = I_1 \times \cdots \times I_n$, el cual es compacto por el Lema 1.64. Así, por el Teorema 1.62 también lo es C. $\square$

TEOREMA 1.66. *Si X es compacto y $f\colon X \to X'$ es continua, entonces $f(X)$ es un subconjunto compacto de X'.*

DEMOSTRACIÓN. Si $(U_i)_{i\in I}$ es un subcubrimiento abierto de $f(X)$, entonces $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$ cubre X. Como X es compacto, existen $i_1, \dots, i_n \in I$ tales que $X \subseteq f^{-1}(U_1) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_i)$. Por lo tanto, $f(X) \subseteq U_1 \cup \cdots \cup U_n$. $\square$

COROLARIO 1.67. *Si X es compacto y $f\colon X \to X'$ es continua, entonces f es cerrada.*

DEMOSTRACIÓN. Por el item 2 del Teorema 1.62, si A es cerrado en X, entonces es compacto. En consecuencia, por el Teorema 1.66, $f(A)$ es compacto y así, por el item 1 del Teorema 1.62, cerrado en X'. $\square$

COROLARIO 1.68. *Si $f\colon X \to X'$ es biyectiva y continua y X es compacto, entonces f es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN. Se sigue inmediatamente del Corolario 1.67 y la Observación 1.21. $\square$

TEOREMA 1.69. *Si $f\colon X \to X'$ es continua y X es compacto, entonces f es uniformemente continua.*

DEMOSTRACIÓN. Por la continuidad de f, dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$ existe $\delta_x > 0$ tal que $d(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{2}$ si $d(x, x') < \delta_x$. Por compaccidad existen $x_1, \dots, x_n \in X$ tales que

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{\frac{\delta_{x_i}}{2}}(x_i).$$

Denotemos con δ a $\min\{\frac{\delta_{x_i}}{2} : 1 \le i \le n\}$. Dados $x, x' \in X$ con $d(x, x') < \delta$, existe i tal que $d(x, x_i) < \frac{\delta_{x_i}}{2}$. Entonces

$$d(x', x_i) \le d(x', x) + d(x, x_i) < \delta + \frac{\delta_{x_i}}{2} \le \delta_{x_i}$$

y, por lo tanto, $d'(f(x), f(x')) \leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), f(x')) < \epsilon$. □

10. Espacios conexos

OBSERVACIÓN 1.70. *Es fácil comprobar que para cada espacio métrico X son equivalentes:*

1. *Existe un subconjunto no vacío y propio de X que es abierto y cerrado.*
2. *Existen conjuntos abiertos U_1 y U_2 de X tales que $U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$, $X = U_1 \cup U_2$ y $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*
3. *Existen conjuntos cerrados C_1 y C_2 de X tales que $C_1 \neq \emptyset$, $C_2 \neq \emptyset$, $X = C_1 \cup C_2$ y $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.*
4. *Existe una función continua $f\colon X \to \{0,1\}$ no constante (aquí $\{0,1\}$ es considerado provisto de la métrica discreta).*

Un espacio métrico X es *no conexo* si se satisfacen las condiciones equivalentes de la observación anterior. En caso contrario es *conexo*. Un subconjunto Y de X es *conexo* si lo es como subespacio. Dos subconjuntos A y B de X *estan separados* si $\overline{A} \cap B = \emptyset$ y $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

TEOREMA 1.71. *Supongamos que $Y \subseteq X$ y que $Y = A \cup B$. Son equivalentes:*

1. *A y B son subconjuntos separados de X.*
2. *A y B son cerrados en Y y $A \cap B = \emptyset$.*

En consecuencia Y es conexo si y sólo si no es unión disjunta de subconjuntos no vacíos separados de X.

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Supongamos que A y B subconjuntos separados de X. Entonces A es un cerrado de Y porque

$$A = \overline{A} \cap A = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = \overline{A} \cap Y$$

y, analogamente, B es un cerrado de Y. Además es claro que $A \cap B = \emptyset$. Recíprocamente, si A y B son cerrados en Y y $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$A = \overline{A} \cap Y = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B)$$

y, por lo tanto, $\overline{A} \cap B \subseteq A \cap B = \emptyset$. Similarmente $A \cap \overline{B} = \emptyset$, de modo que A y B son subconjuntos separados de X. □

TEOREMA 1.72. *Un subconjunto Y de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.*

DEMOSTRACIÓN. $\Rightarrow$) Si Y no es un intervalo, entonces existen $a, b \in Y$ y $c \in \mathbb{R} \setminus Y$ tales que $a < c < b$. Es claro que $Y = (Y \cap (-\infty, c)) \cup (Y \cap (c, +\infty))$ y así, Y no es conexo.
$\Leftarrow$) Supongamos que Y no es conexo. Entonces existe una función continua no constante $f\colon Y \to \{0,1\}$. Tomemos $a < b \in Y$, con $f(a) \neq f(b)$ y denotemos con x_0 al supremo de todos los $x \in [a,b]$ tales que f es constante en $[a,x]$. Si $f(x_0) = f(a)$, entonces por la continuidad de f existe $\epsilon > 0$ tal que f es constante en $[a, x_0 + \epsilon]$; y si $f(x_0) = f(b)$, entonces, nuevamente por la continuidad de f, existe $\epsilon > 0$ tal que $a < x_0 - \epsilon$ y $f(x_0 - \epsilon) = f(b)$. Como ambas situaciones son absurdas, Y es conexo. □

TEOREMA 1.73. *Si X es conexo y $f\colon X \to X'$ es continua, entonces $f(X)$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Si A y B fueran subconjuntos abiertos no vacíos de $f(X)$ tales que $f(X) = A \cup B$ y $A \cap B = \emptyset$, entonces $f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(B)$ serían subconjuntos abiertos no vacíos de X tales que $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ y $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = \emptyset$. □

Ejercicio 1.74. *Pruebe el teorema anterior mostrando que toda función continua de* $f(X)$ *en* $\{0,1\}$ *es constante.*

Teorema 1.75. *Si* A *es un subconjunto conexo de* X *y* $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$*, entonces* B *es conexo.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B = X$. Toda función continua $f\colon B \to \{0,1\}$ es constante sobre A, porque A es conexo. Como $f^{-1}(0)$ y $f^{-1}(1)$ son cerrados, esto implica que f es constante. □

Corolario 1.76. *Si* $A \subseteq X$ *es conexo y denso, entonces* X *es conexo.*

Teorema 1.77. *Consideremos una familia* $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ *de subconjuntos conexos de* X*. Si para cada par de puntos* $x, x' \in \bigcup_{i\in I} A_i$*, existen* $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ *tales que*

$$x \in A_{i_1}, \quad x' \in A_{i_n} \quad \text{y} \quad A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset \text{ para todo } j,$$

entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ *es conexo.*

Demostración. Como los conjuntos A_i son conexos, toda función continua

$$f\colon \bigcup_{i\in I} A_i \to \{0,1\}$$

es constante sobre la unión de cada familia finita $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$, tal que $A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset$ para todo j. Por la hipótesis esto implica que f es constante. □

La *componente conexa* de un punto $x \in X$ es el conjunto

$$C_x = \bigcup \{A \subseteq X : x \in A \text{ y } A \text{ es conexo}\}.$$

Ejemplos 1.78. *Veamos algunos ejemplos:*

1. *Si* X *es conexo, entonces* $C_x = X$ *para todo* $x \in X$.
2. *Las componentes conexas de* $(0,2) \setminus \{1\}$ *son los intervalos* $(0,1)$ *y* $(1,2)$.
3. *Si* X *tiene la métrica discreta, entonces* $C_x = x$ *para todo* $x \in X$.
4. $C_x = x$ *para todo* $x \in \mathbb{Q}$.

Proposición 1.79. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. C_x *es conexo.*
2. *Si* $x \in A$ *y* A *es conexo, entonces* $A \subseteq C_x$.
3. $C_x \cap C_y = \emptyset$ *o* $C_x = C_y$.
4. $X = \bigcup_{x\in X} C_x$.

Demostración. Es evidente que los items 2) y 4) son ciertos, y usando el Teorema 1.77 se ve fácilmente que también lo son el 1) y el 3). □

Observación 1.80. *Por el Teorema 1.75, las componentes conexas de* X *son cerradas, y el último ejemplo muestra que no tienen porqué ser abiertas.*

Ejercicio 1.81. *Un espacio métrico* X *se dice* totalmente desconexo *si todos sus subconjuntos con más de un punto son desconexos. Pruebe que* X *es totalmente desconexo si y sólo si* $C_x = x$ *para todo* $x \in X$.

10.1. Espacios arco-conexos Dados puntos x, y de un espacio métrico X, un *arco* o *camino* de x a y es una función continua $\varphi\colon [a,b] \to X$, de un intervalo cerrado no degenerado de $\mathbb{R}$ en X, con $\varphi(a) = x$ y $\varphi(b) = y$. Los puntos x e y son los *extremos inicial* y *final* del arco. Como todos los intervalos cerrados no degenerados de $\mathbb{R}$ son homeomorfos, el intervalo $[a,b]$ puede ser reemplazado por cualquier otro. Dados arcos $\varphi\colon [a,b] \to X$ de x a y y $\psi\colon [b,c] \to X$ de y a z, las funciones $\tilde{\varphi}\colon [-b,-a] \to X$ y $\psi * \varphi\colon [a,c] \to X$, definidas por $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ y

$$\psi * \varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si } t \le b, \\ \psi(t) & \text{si } t \ge b, \end{cases}$$

son arcos de y a x y de x a z, respectivamente. Decimos que x e y *se pueden unir por un arco* si existe un arco $\varphi\colon [a,b] \to X$, de x a y. Un espacio métrico X es *arco-conexo* si cada par de puntos de X se pueden unir por un arco. Un subconjunto Y de X es *conexo* si lo es con la métrica inducida.

Ejemplos 1.82. *Si bien toda las afirmaciones que siguen pueden comprobarse en forma directa, algunas son más fáciles de verificar apelando a resultados que daremos despúes en esta misma sección:*

1. *Un subconjunto de* $\mathbb{R}$ *es arco-conexo si y sólo si es un intervalo.*
2. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *es arco-conexo si y sólo si* $n \ge 2$.
3. *Un subconjunto* A *de* $\mathbb{R}^n$ *es* estrellado *si tiene un punto* x *tal que para todo otro punto* y *de* X, *el segmento que une* x *con* y *está incluído en* X. *Todo subconjunto estrellado de* $\mathbb{R}^n$ *es arco-conexo.*
4. $S^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} : \|\mathbf{x}\|_2 = 1\}$ *es arco-conexo para todo* $n \ge 1$.

Teorema 1.83. *Todo espacio métrico arco-conexo* X *es conexo.*

Demostración. Por el Teorema 1.73, como los intervalos de $\mathbb{R}$ son conexos y los arcos son funciones continuas, cada par de puntos x, y de X pertenecen a un subconjunto conexo de X. Por el Teorema 1.77 esto implica que X es conexo. □

El siguiente ejemplo muestra que la recíproca de este resultado no vale.

Ejemplo 1.84. *La* curva seno del topólogo *es el subconjunto*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \operatorname{sen}(1/x)\} \cup \big(\{0\} \times [-1,1]\big),$$

de $\mathbb{R}^2$. *Es fácil ver que* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \operatorname{sen} 1/x\}$ *es arco-conexo. Por lo tanto también lo es su adherencia* A. *Sin embargo* A *no es arco-conexo. En efecto, si hubiera un arco* $\varphi\colon [0,1] \to A$, *de* $(0,1)$ *a* $(1, \operatorname{sen}(1))$, *entonces este camino pasaría por todos los puntos* (x,y) *de* A *con* $0 < x < 1$ *(porque si no su imagen no sería conexa), pero hay infinitos de estos puntos con segunda coordenada* 1 *e infinitos con segunda coordenada* -1, *y es imposible que todos esten en la imagen de* φ, *porque es uniformemente continua.*

Teorema 1.85. *Si* X *es arco-conexo y* $f\colon X \to X'$ *es continua, entonces* $f(X)$ *es arco-conexo.*

Demostración. Porque si φ es un arco de x a y en X, entonces $f \circ \varphi$ es un arco de $f(x)$ a $f(y)$ en $f(X)$. □

TEOREMA 1.86. *Consideremos una familia* $(A_i)_{i\in\mathbb{I}}$ *de subconjuntos arco-conexos de* X. *Si para cada par de puntos* $x, x' \in \bigcup_{i\in I} A_i$, *existen* $A_{i_1}, \dots, A_{i_n}$ *tales que*

$$x \in A_{i_1}, \quad x' \in A_{i_n} \quad y \quad A_{i_j} \cap A_{i_{j+1}} \neq \emptyset \text{ para todo } j,$$

entonces $\bigcup_{i\in I} A_i$ *es arco-conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, dados $x, x' \in \bigcup_{i\in I} A_i$, existen puntos

$$x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$$

tales que para cada $i < n$ hay un camino

$$\varphi_i \colon [a_i, a_{i+1}] \to \bigcup_{i\in I} A_i$$

de x_i en x_{i+1}. El arco $\varphi_n * \cdots * \varphi_0$ va de x a x'. □

La *componente arco-conexa* de un punto $x \in X$ es el conjunto

$$C_x^{arc} = \bigcup \{A \subseteq X : x \in A \text{ y } A \text{ es arco-conexo}\}.$$

PROPOSICIÓN 1.87. *Las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. C_x^{arc} *es arco-conexo.*
2. *Si* $x \in A$ *y* A *es arco-conexo, entonces* $A \subseteq C_x^{arc}$.
3. $C_x^{arc} \cap C_y^{arc} = \emptyset$ *o* $C_x^{arc} = C_y^{arc}$.
4. $X = \bigcup_{x\in X} C_x^{arc}$.

DEMOSTRACIÓN. Es evidente que los items 2) y 4) son ciertos, y usando el Teorema 1.86 se ve fácilmente que también lo son el 1) y el 3). □

OBSERVACIÓN 1.88. *A diferencia de las componentes conexas, las arco-conexas pueden no ser cerradas. Por ejemplo, las de la curva seno del topólogo son los subconjuntos* $\{0\}\times[-1,1]$, *que es cerrado, y* $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \operatorname{sen}(1/x)\}$, *que no lo es.*

11. Compaccidad (Segunda Parte)

Un conjunto $Y \subseteq X$ es *relativamente compacto* si $\overline{Y}$ es compacto. Por los items 1 y 2 de las Proposición 1.58, el Teorema 1.60 y el hecho de que todo subconjunto cerrado de un espacio métrico completo es un espacio métrico completo, sabemos que si X es completo, entonces Y es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.

Recordemos que el conjunto $C(Z, X)$ de las funciones continuas y acotadas $f \colon Z \to X$ es un espacio métrico via la distancia $d_\infty(f, g) = \sup_{z\in Z} d(f(z), g(xz))$, para cada par X, Z de espacios métricos.

Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{C}(Z, X)$ es *equicontinuo* si para cada $z \in Z$ y cada $\epsilon > 0$, existe $\delta_x > 0$ tal que

$$d(z', z) < \delta_z \Rightarrow d(f(z'), f(z)) < \epsilon \quad \text{para todo } z' \in Z \text{ y } f \in \mathcal{F},$$

y es *uniformemente equicontinuo* si dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(z', z) < \delta \Rightarrow d(f(z'), f(z)) < \epsilon, \quad \text{para todo } z, z' \in Z \text{ y } f \in \mathcal{F}.$$

TEOREMA 1.89 (Arzelá–Ascoli). *Consideremos* $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{C}(Z, X)$ *y para cada* $z \in Z$ *escribamos* $\mathcal{F}(z) = \{f(z) : f \in \mathcal{F}\}$. *Si* Z *es compacto y* X *es completo, entonces son equivalentes:*

1. *$\mathcal{F}$ es equicontinuo y $\mathcal{F}(z)$ es relativamente compacto para todo $z \in Z$.*
2. *$\mathcal{F}$ es relativamente compacto*
3. *$\mathcal{F}$ es uniformemente equicontinuo y $\mathcal{F}(z)$ es relativamente compacto para todo $z \in Z$.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Tomemos $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{F}$ es equicontinua, para cada $z \in Z$ existe $\delta_z > 0$, tal que si $z' \in \mathrm{B}_{\delta_z}(z)$, entonces $d(f(z), f(z')) < \epsilon$ para todo $f \in \mathcal{F}$. Por compaccidad,

$$Z \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{B}_{\delta_{z_i}}(z_i),$$

para un subconjunto finito $\{z_1, \dots, z_n\}$ de puntos de Z. Como $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}(z_i)$ es totalmente acotado, existen un número finito de bolas $\mathrm{B}_\epsilon(a_j)$ de radio ϵ, tales que

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}(z_i) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{B}_\epsilon(a_j).$$

Denotemos con $\mathbb{I}_{nm}$ al conjunto de todas las funciones $\sigma\colon \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, m\}$. Para cada $\sigma \in \mathbb{I}_{nm}$, escribamos $\mathcal{F}_\sigma = \{f \in \mathcal{F} : d(f(x_i), a_{\sigma(i)}) < \epsilon$, para todo $i\}$. Es fácil ver que $\mathcal{F} = \bigcup_{\sigma \in \mathbb{I}_{nm}} \mathcal{F}_\sigma$.

Consideremos ahora dos funciones f, g pertenecientes a un mismo $\mathcal{F}_\sigma$. Dado $z \in Z$, tomemos z_i tal que $d(z, z_i) < \delta_{z_i}$. Entonces,

$$d(f(z), g(z)) \le d(f(z), f(z_i)) + d(f(z_i), a_{\sigma(i)}) + d(a_{\sigma(i)}, g(z_i)) + d(g(z_i), g(z)) < 4\epsilon.$$

Así, diám$(\mathcal{F}_\sigma) < 4\epsilon$. Como ϵ y σ son arbitrarios, esto muestra que $\mathcal{F}$ es totalmente acotado.
2. $\Rightarrow$ 3. Tomemos $\epsilon > 0$. Como $\mathcal{F}$ es relativamente compacto, existen subconjuntos $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ de $\mathrm{C}(Z, X)$, todos de diámetro menor que ϵ, tales que $\mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i$. Elijamos

$$f_1 \in \mathcal{F}_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}_n.$$

Dado que, por el Teorema 1.69, las f_i's son uniformemente continuas, existe $\delta > 0$, tal que

$$d(z, z') < \delta \Rightarrow d(f_i(z), f_i(z')) < \epsilon, \quad \text{para todo } i.$$

Dado $f \in \mathcal{F}$, tomemos i tal que $d_\infty(f, f_i) < \epsilon$. Si $d(z, z') < \delta$, entonces

$$d(f(z), f(z')) \le d(f(z), f_i(z)) + d(f_i(z), f_i(z')) + d(f_i(z'), f(z')) \le 3\epsilon.$$

Así, $\mathcal{F}$ es uniformente equicontinua. Finalmente, $\mathcal{F}(z)$ es relativamente compacto para todo $z \in Z$, porque $\mathcal{F}$ es relativamente compacto y la aplicación

$$\mathrm{ev}_z\colon \overline{\mathcal{F}} \to X,$$

definida por $\mathrm{ev}_z(f) = f(z)$, es continua.
3. $\Rightarrow$ 1. Es evidente. □

Una sucesión de funciones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de un conjunto X en $\mathbb{R}$, es *creciente* si $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$ y es *estrictamente creciente* si $f_n(x) < f_{n+1}(x)$ para todo $x \in X$ y todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.90 (Dini). *Consideremos un espacio métrico compacto X y una función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es un sucesión creciente de funciones continuas de X en $\mathbb{R}$, tal que* $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ *para todo $x \in X$ (convergencia puntual), entonces f_n tiende a f uniformemente.*

Demostración. Tomemos $x \in X$ y $\epsilon > 0$. Por hipótesis existe $n_0(x)$, tal que $n \geq n_0$ implica $d(f_n(x), f(x)) < \frac{\epsilon}{2}$. Elijamos un entorno abierto V_x de x tal que $d(f_{n_0}(x'), f(x')) < \epsilon$ para todo $x' \in V_x$. Entonces $d(f_n(x), f(x')) < \epsilon$ para todo $n \geq n_0$ y $x' \in V_x$. Por compaccidad, existen $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $X = V_{x_1} \cup \cdots \cup V_{x_m}$. Si $n \geq \text{máx}\{n_0(x_1), \dots, n_0(x_m)\}$, entonces $d(f_n(x), f(x)) < \epsilon$ para todo $x \in X$. □

Lema 1.91. *La sucesión de polinomios $P_n(t) \in \mathbb{R}[t]$, definida recursivamente por*

- $P_0(t) = 0$,
- $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$,

es creciente y tiende a $\sqrt{t}$ uniformemente en $[0,1]$.

Demostración. Es claro que $P_n(0) = 0$ para todo $n \geq 0$. Veamos que

$$0 \leq P_n(t) < P_{n+1}(t) < \sqrt{t} \quad \text{para todo } n \geq 0 \text{ y todo } t \in (0,1).$$

Para $n = 0$ esto es claro. Supongamos que $0 \leq P_{n-1}(t) < P_n(t) < \sqrt{t}$. Entonces evidentemente

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)) > P_n(t),$$

y sólo resta probar que $P_{n+1}(t) < \sqrt{t}$. Para ello es suficiente observar que por hipótesis inductiva $P_n(t) < \sqrt{t} < 2 - \sqrt{(t)}$ para todo $t \in [0,1]$ y que

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(t) < \sqrt{t} &\Leftrightarrow P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t)) < P_n(t) + \sqrt{t} - P_n(t)\\
&\Leftrightarrow t - P_n^2(t) < 2(\sqrt{t} - P_n(t))\\
&\Leftrightarrow \sqrt{t} + P_n(t) < 2\\
&\Leftrightarrow P_n(t) < 2 - \sqrt{(t)},
\end{aligned}$$

donde la tercera desigualdad equivale a la cuarta porque $\sqrt{t} - P_n(t) > 0$. Escribamos ahora $f(t) = \text{lím}_{n\to\infty} P_n(t)$. Como $P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n^2(t))$,

$$f(t) = f(t) + \frac{1}{2}(t - f(t)^2),$$

por lo que $f(t) = \sqrt{t}$. Finalmente, la convergencia es uniforme por el Teorema de Dini. □

Un *álgebra conmutativa* sobre un cuerpo k es un anillo conmutativo A junto con un morfismo de anillos $i\colon k \to A$. Una *subálgebra* B de A es un subanillo B de A tal que $i(k) \subseteq B$.

Ejemplo 1.92. *Para cada espacio métrico X, el conjunto* $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$, *de las funciones continuas y acotadas de X en $\mathbb{R}$, es un álgebra sobre $\mathbb{R}$ via*

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$,
- $i(\lambda)(x) = \lambda$.

Una subálgebra A de $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ *separa puntos* si dados $x, y \in X$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

Proposición 1.93. *Si A es una subálgebra de* $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$, *entonces la adherencia $\overline{A}$, de A respecto de la distancia d_∞, también lo es.*

Demostración. Tomemos $f_n, g_n, f, g \in \mathrm{C}(X, \mathbb{R})$. Es fácil ver que si

$$f = \lim_{\text{unif}} f_n \quad \text{y} \quad g = \lim_{\text{unif}} g_n,$$

entonces $f + g = \lim_{\text{unif}} f_n + g_n$ y $fg = \lim_{\text{unif}} f_n g_n$. □

Teorema 1.94 (Stone–Weirstrass). *Consideremos un espacio métrico compacto X. Si A es una subálgebra de $\mathrm{C}(X, \mathbb{R})$ que separa puntos, entonces A es densa.*

Demostración. Lo probaremos en varios pasos.

1) Si f,g $\in \overline{\mathbf{A}}$, entonces máx(f,g) y mín(f,g) pertenecen a $\overline{\mathbf{A}}$. En efecto, como

$$\max(f, g) = \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} \qquad \text{y} \qquad \min(f, g) = \frac{f + g}{2} - \frac{|f - g|}{2},$$

donde $|f-g|$ es la función definida por $|f-g|(x) = |f(x)-g(x)|$, para verificar esta afirmación, bastará probar que $h \in \overline{A} \Rightarrow |h| \in \overline{A}$. Pero por el Lema 1.91, sabemos que

$$MP_n \circ \tfrac{1}{M^2} h^2 \xrightarrow{\text{unif}} \sqrt{h^2} = |h|,$$

donde $M > 0$ es cualquier cota superior de $\{|h(x)| : x \in X\}$, y como $P_n \circ \frac{1}{M^2} h^2 \in \overline{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de este hecho se sigue que $|h| \in \overline{A}$.

2) Dados x,y $\in$ X y a,b $\in \mathbb{R}$, existe f $\in$ A tal que f(x) = a y f(y) = b. En efecto, si $g \in A$ satisface $g(x) \neq g(y)$, podemos tomar

$$f(z) = a + (b - a)\left(\frac{g(z) - g(x)}{g(y) - g(x)}\right).$$

3) Dados h $\in$ C(X,$\mathbb{R}$), x $\in$ X y $\boldsymbol{\epsilon > 0}$, existe $\mathbf{h_x} \in \overline{\mathbf{A}}$ tal que $\mathbf{h_x(x) = h(x)}$ y $\mathbf{h_x(x') \le h(x') + \boldsymbol{\epsilon}}$ para todo $\mathbf{x' \in X}$. En efecto, por el segundo paso, para cada $y \in X$ podemos elegir $h_{xy} \in A$ tal que $h_{xy}(x) = h(x)$ y $h_{xy}(y) = h(y)$ y, una vez elegido h_{xy}, tomar un entorno abierto V_y de y tal que $h_{xy}(y') < h(y') + \epsilon$ para todo $y' \in V_y$. Por compaccidad existen $y_1, \dots, y_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^m V_{y_i}$. La función $h_x = \min(h_{xy_1}, \dots, h_{xy_m})$ satisface la desigualdad pedida y, por el primer paso, pertenece a $\overline{A}$.

4) Dado h $\in$ C(X,$\mathbb{R}$) y $\boldsymbol{\epsilon > 0}$, existe $\widetilde{\mathbf{h}} \in \overline{\mathbf{A}}$ tal que $\mathbf{h - \boldsymbol{\epsilon} < \widetilde{h} < h + \boldsymbol{\epsilon}}$. En efecto, para cada $x \in X$, tomemos primero, h_x como en el tercer paso, y luego un entorno abierto V_x de x tal que $h_x(x') > h(x') - \epsilon$ para todo $x' \in V_x$. Por compaccidad existen $x_1, \dots, x_m \in X$ tales que $X = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$. Claramente la función $\widetilde{h} = \max(h_{x_1}, \dots, h_{x_m})$ satisface la desigualdad pedida y, por el primer paso, pertenece a $\overline{A}$. □

Corolario 1.95. *Toda función continua $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es límite uniforme de una sucesión $P_1, P_2, P_3, \dots$ de funciones polinomiales $P_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$.*

Capítulo 2

Espacios de Banach

A partir de ahora, $k = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

1. Espacios Normados

Una *norma* en un espacio vectorial E es una función $\| \ \| \colon E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que satisface:

1. $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$.
2. $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Un *espacio normado* es un k-espacio vectorial E, provisto de una norma.

PROPOSICIÓN 2.1. *Si $\| \ \|$ es una norma en E, entonces la función $d \colon E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, definida por $d(x,y) = \|x - y\|$, es una métrica que satisface:*

1. *$d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (Invariancia por traslaciones)*
2. *$d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = |\lambda| d(x, y)$ (Homogeneidad).*

DEMOSTRACIÓN. En efecto,

$$\begin{aligned} &d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x = y, \\ &d(x,y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y,x), \\ &d(x,z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x,y) + d(y,z), \\ &d(x+z, y+z) = \|(x+z) - (y+z)\| = \|x - y\| = d(x,y) \end{aligned}$$

y por último,

$$d(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| d(x,y).$$

□

EJERCICIO 2.2. *Pruebe que si $d \colon E \times E \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ es una distancia invariante por traslaciones y homogenea, entonces existe una única norma $\| \ \|$ en E, tal que $d(x,y) = \|x - y\|$, para todo $x, y \in E$.*

Dados espacios normados E y F, el producto $E \times F$ es un espacio normado, via la norma $\| \|_\infty$, definida por $\|(x,y)\|_\infty = \text{máx}(\|x\|, \|y\|)$. Notemos que la métrica que induce esta norma sobre $E \times F$ es la definida en el item 6 del Ejemplo 1.1. Salvo indicación en contrario, siempre consideraremos al producto $E \times F$, de espacios normados E y F, dotado con la norma $\| \|_\infty$.

TEOREMA 2.3. *Para cada espacio normado E, las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

1. *La función* $E \xrightarrow{\| \|} \mathbb{R}_{\geq 0}$ *es uniformemente continua,*
2. *La función* $E \times E \xrightarrow{+} E$ *es uniformemente continua y la función* $k \times E \xrightarrow{\cdot} E$ *es continua. Además, la restricción de esta función a* $B_r(0) \times B_r(0)$*, es uniformemente continua, para todo* $r > 0$*,*
3. *Si* $\lambda \in k \setminus \{0\}$ *y* $x \in E$*, entonces la función* $y \mapsto x + \lambda \cdot y$ *es un homeomorfismo de* E *en si mismo.*

DEMOSTRACIÓN. El primer item se sigue facilmente de que, por el item 2 de la Observación 1.3,

$$|\|x_1\| - \|x_2\|| = |d(x_1,0) - d(x_2,0)| \leq d(x_1,x_2) = \|x_1 - x_2\|,$$

y, el segundo, de las desigualdades

$$\|(x_1 + x_2) - (x_1' + x_2')\| \leq \|x_1 - x_1'\| + \|x_2 - x_2'\|$$

y

$$\|\lambda \cdot x - \lambda' \cdot x'\| \leq |\lambda|\|x - x'\| + |\lambda - \lambda'|\|x'\|.$$

Dejamos la prueba del tercero al lector. □

2. Espacios de Banach

Un *espacio de Banach* es un espacio normado completo.

EJEMPLOS 2.4. *A continuación damos una lista de espacios normados, señalando cuales de ellos son espacios de Banach.*

1. *Un subespacio vectorial F de un espacio normado E es en si mismo un espacio normado via la norma inducida. Cada uno de estos espacios es llamado un* subespacio normado *de E. Es fácil ver que si F es un subespacio normado de E, entonces también lo es su clausura $\overline{F}$. Por la Proposición 1.27 sabemos que si F es un subespacio de Banach de E, entonces F es cerrado en E y, por el comentario que sigue al Teorema 1.26, que si E es un espacio de Banach, entonces también lo es todo subespacio cerrado suyo.*
2. *Dados un conjunto Z y un espacio normado E, el conjunto* $\mathrm{B}(Z,E)$*, de las funciones acotadas de Z en E, es un espacio normado via la suma de funciones, el producto por escalares y la norma definidas por*
   - $(f+g)(z) = f(z) + g(z)$,
   - $(\lambda \cdot f)(z) = \lambda \cdot f(z)$,
   - $\|f\|_\infty = \sup_{z \in Z} \|f(z)\|$.

Es evidente que la métrica asociada a esta norma es la distancia d_∞ *introducida en la Seccion 5 del Capítulo 1. Por el Teorema 1.29, si* E *es un espacio de Banach, entonces también lo es* $\mathrm{B}(Z, E)$.

3. *Asumamos ahora que* Z *es un espacio métrico. Por el Teorema 2.3, dadas funciones continuas* $f\colon Z \to V$ *y* $g\colon Z \to V$ *y un escalar* λ, *la función* $f + \lambda \cdot g$ *es continua. Por lo tanto el conjunto* $\mathrm{C}(Z, E)$, *de las funciones continuas y acotadas de* Z *en* E, *es un subespacio normado de* $\mathrm{B}(Z, E)$. *Por el Teorema 1.31, si* E *es un espacio de Banach, entonces también lo es* $\mathrm{C}(Z, E)$.
4. *Para cada espacio de Banach* E, *el conjunto* $c(E)$, *de las sucesiones convergentes de elementos de* E, *es un subespacio cerrado de* $\mathrm{B}(\mathbb{N}, E)$. *Además, el conjunto* $c_0(E)$, *formado por las sucesiones que convergen a cero, es un subespacio cerrado de* $c(E)$. *En consecuencia, todos estos espacios son de Banach. Siguiendo la práctica usual escribiremos* l_∞, c *y* c_0 *en lugar de* $\mathrm{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, $c(\mathbb{R})$ *y* $c_0(\mathbb{R})$, *respectivamente.*
5. *El* $\mathbb{R}$*-espacio vectorial* l_p $(1 \le p < \infty)$, *formado por las sucesiones* $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in N}$ *de elementos de* $\mathbb{R}$ *que satisfacen* $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty$, *es un espacio de Banach con la norma* $\|\ \|_p$, *definida por* $\|\mathbf{x}\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p}$. *En efecto, dada una sucesión*

$$\mathbf{x} := x_1, x_2, x_3, \dots$$

y $n \in \mathbb{N}$, *denotemos con* $\mathbf{x}_{|n}$ *a* $(x_1, \dots, x_n)$. *Por el item 6 de los Ejemplos 1.1*

$$\|\mathbf{x}_{|n} + \mathbf{y}_{|n}\|_p \le \|\mathbf{x}_{|n}\|_p + \|\mathbf{y}_{|n}\|_p \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.$$

Como esto vale para todo n,

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|_p = \lim_{n\to\infty} (\|\mathbf{x}_{|n} + \mathbf{y}_{|n}\|_p) \le \|\mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{y}\|_p.$$

Como además

$$\|\lambda \cdot \mathbf{x}|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda x_i|^p} = |\lambda| \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p} = |\lambda| |\mathbf{x}|_p,$$

l_p *es un subespacio de* l_∞ *y* $\|\ \|_p$ *es una norma sobre* l_p. *Veamos que es completo. Supongamos que* $(\mathbf{x}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* l_p. *Entonces la sucesión* $(x_m^n)_{n\in\mathbb{N}}$, *de las coordenadas* m*-ésimas de* $(\mathbf{x}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, *es de Cauchy para todo* $m \in \mathbb{N}$. *Como* $\mathbb{R}$ *es completo, existe* $x_m := \lim x_m^n$. *Escribamos* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. *Dado* $\epsilon > 0$, *elijamos* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}^{n'}\|_p < \epsilon$, *para todo* $n, n' \ge n_0$. *Entonces*

$$\|\mathbf{x}_{|m}^n - \mathbf{x}_{|m}\|_p = \lim_{n'\to\infty} \|\mathbf{x}_{|m}^n - \mathbf{x}_{|m}^{n'}\|_p \le \epsilon.$$

Como esto vale para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\mathbf{x}^n - \mathbf{x}\|_p = \lim_{n'\to\infty} \|\mathbf{x}_{|m}^n - \mathbf{x}_{|m}\|_p \le \epsilon \qquad \text{para todo } n \ge n_0. \tag{8}$$

En consecuencia $\|\mathbf{x}\|_p \le \|\mathbf{x}^n\|_p + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^n\|_p < \infty$, *por lo que* $\mathbf{x} \in l_p$. *Por último, la acotación* (8) *muestra que* $\mathbf{x} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}^n$ *en* l_p.

TEOREMA 2.5. *La completación de un espacio normado* E *es un espacio de Banach.*

Demostración. Si $i\colon E \hookrightarrow E'$ es una completación de E, entonces $E' \times E'$ es completo e $i(E)\times i(E)$ es denso en $E'\times E'$. En otras palabras, $i\times i\colon E\times E \hookrightarrow E'\times E'$ es una completación de $E \times E$. Así, por los Teoremas 1.32 y 2.3 las funciones

$$E \xrightarrow{\|\ \|} \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad E\times E \xrightarrow{+} E \quad \text{y} \quad k\times E \xrightarrow{\cdot} E,$$

se extienden de manera única a funciones continuas

$$E' \xrightarrow{\|\ \|'} \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad E'\times E' \xrightarrow{+'} E' \quad \text{y} \quad k\times E' \xrightarrow{\cdot'} E'.$$

Dados x e y en E', tomemos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en E que convergan a x y y respectivamente. Debido a la continuidad de la suma y producto por escalares en E',

$$x +' \lambda \cdot' y = \lim_{n\to\infty} x_n +' \lambda \cdot' \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} (x_n + \lambda\cdot y_n).$$

para cada $\lambda \in k$, y usando esto se comprueba fácilmente que E' es un k-espacio vectorial. Por ejemplo, la suma es comutativa porque

$$x +' y = \lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty}(y_n+x_n) = y +' x,$$

y los restantes axiomas se demuestran de la misma manera. Finalmente, las igualdades

$$\|x +' y\|' = \|\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)\|' = \lim_{n\to\infty}\|x_n+y_n\| \leq \lim_{n\to\infty}(\|x_n\|+\|y_n\|) = \|x\|' + \|y\|'$$

y

$$\|\lambda\cdot' x\|' = \|\lim_{n\to\infty}(\lambda\cdot x_n)\|' = \lim_{n\to\infty}\|\lambda\cdot x_n\| = \lim_{n\to\infty}(|\lambda|\|x_n\|) = |\lambda|\lim_{n\to\infty}(\|x_n\|) = |\lambda|\|x\|',$$

muestran que $\|\ \|'$ es una norma y, las igualdades

$$\|x -' y\|' = \|\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)\|' = \lim_{n\to\infty}\|x_n-y_n\| = \lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d'(x,y),$$

que $\|\ \|'$ define la distancia de E'. □

3. Transformaciones Lineales

Supongamos que E y F son espacios normados. Una transformación lineal $f\colon E\to F$ es *acotada* si existe una constante $c>0$, llamada una *cota* de f, tal que $\|f(x)\|\leq c\|x\|$ para todo $x\in E$. Denotamos con el símbolo $\mathrm{Hom}_k(E,F)$ al espacio de las transformaciones lineales de E en F y, con el símbolo $\mathcal{L}(E,F)$, al subconjunto de $\mathrm{Hom}_k(E,F)$ formado por las transformaciones lineales acotadas. Supongamos que $f_1,f_2\colon E\to F$ son acotadas con cotas c_1 y c_2 respectivamente. La desigualdad

$$\|f_1(x)+\lambda\cdot f_2(x)\| \leq \|f_1(x)\| + \|\lambda\cdot f_2(x)\| \leq (c_1+|\lambda|c_2)\|x\|$$

muestra que entonces $f_1+\lambda\cdot f_2$ es acotada con cota $c_1+|\lambda|c_2$. Así, $\mathcal{L}(E,F)$ es un subespacio vectorial de $\mathrm{Hom}_k(E,F)$. Como es usual, escribiremos $\mathrm{End}_k(E)$ en lugar de $\mathrm{Hom}_k(E,E)$ y $\mathcal{L}(E)$ en lugar de $\mathcal{L}(E,E)$. Una transformación lineal $f\in\mathcal{L}(E,F)$ es un *isomorfismo* de espacios vectoriales normados si es biyectiva y $f^{-1}\in\mathcal{L}(F,E)$. Dos espacios normados E y F son *isomorfos* si hay un isomorfismo $f\colon E\to F$.

Teorema 2.6. *Para cada $f\in\mathrm{Hom}_k(E,F)$, son equivalentes:*

1. $f\in\mathcal{L}(E,F)$.
2. f *es uniformemente continua.*

3. *f es continua en* 0.
4. $\sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| < \infty$.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Porque si c es una cota de f, entonces

$$\|f(x) - f(x')\| = \|f(x - x')\| \leq c\|x - x'\|$$

para todo $x, x' \in E$.
2. $\Rightarrow$ 3. Es evidente.
3. $\Rightarrow$ 4. Por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que $f(\mathrm{B}_\delta(0)) \subseteq \mathrm{B}_1(0)$. En consecuencia,

$$\|f(x)\| = \frac{1}{\delta'}\|\delta' f(x)\| = \frac{1}{\delta'}\|f(\delta' x)\| < \frac{1}{\delta'},$$

para todo x con $\|x\| = 1$ y todo $0 < \delta' < \delta$.
4. $\Rightarrow$ 1. Escribamos $M = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Es evidente que $\|f(0)\| \leq M0$ y, para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = f\Big(\frac{x}{\|x\|}\Big) \leq M.$$

Esto termina la prueba. □

Decimos que dos normas $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$, definidas sobre un espacio vectorial E, *son equivalentes* si existen c_1 y c_2 en $\mathbb{R}_{>0}$ tales que $\|x\|_1 \leq c_1\|x\|_2$ y $\|x\|_2 < c_2\|x\|_1$ para todo $x \in E$.

Corolario 2.7. *Son equivalentes:*

1. $\| \ \|_1$ *y* $\| \ \|_2$ *son equivalentes.*
2. id_E *es uniformemente continua cuando consideramos al dominio con la norma* $\| \ \|_1$ *y al codominio con la norma* $\| \ \|_2$ *y cuando consideramos al dominio con la norma* $\| \ \|_2$ *y al codominio con la norma* $\| \ \|_1$.
3. id_E *es continua en* 0 *cuando consideramos al dominio con la norma* $\| \ \|_1$ *y al codominio con la norma* $\| \ \|_2$ *y cuando consideramos al dominio con la norma* $\| \ \|_2$ *y al codominio con la norma* $\| \ \|_1$.

Dado $f \in \mathcal{L}(E, F)$, definimos la *norma* de f por $\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|$. Es fácil ver que

$$\|f\| = \sup_{x \in B_1(0)} \|f(x)\| = \sup_{x \in E\setminus\{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} = \min\{c \in \mathbb{R}_{\geq 0} : \|f(x)\| \leq c\|x\| \ \forall\, x \in E\},$$

para toda $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Teorema 2.8. $\mathcal{L}(E, F)$ *es un espacio normado.*

Demostración. Tomemos $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ y $\lambda \in k$. Por definición,

$$\|\lambda \cdot f\| = \sup_{\|x\|=1} \|\lambda \cdot f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} |\lambda|\|f(x)\| = |\lambda|\|f\|$$

y

$$\|f\| = 0 \Rightarrow \|f(x)\| = 0 \text{ para todo } x \in E \text{ con } \|x\| = 1 \Rightarrow f = 0.$$

Finalmente, de las desigualdades

$$\|(f + g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\| = (\|f\| + \|g\|)\|x\|,$$

validas para todo $x \in E$, se sigue inmediatamente que $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. □

Observación 2.9. *De la desigualdad*

$$\|f(x)-g(y)\| = \|f(x)-g(x)+g(x)-g(y)\| \leq \|(f-g)(x)\|+\|g(x-y)\| \leq \|f-g\|\|x\|+\|g\|\|x-y\|,$$

valida para todo $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ *y todo* $x, y \in E$*, se sigue que la función* evaluación

$$\mathrm{ev}\colon \mathcal{L}(E,F) \times E \to F,$$

definida por $\mathrm{ev}(f,x) = f(x)$*, es continua. En consecuencia si* $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ *en* $\mathcal{L}(E,F)$ *y* $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ *en* E*, entonces* $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$ *en* F*. Esto muestra en particular que si* f_n *tiende a* f *en* $\mathcal{L}(E,F)$*, entonces* f_n *tiende a* f *puntualmente. Más aún, de la desigualdad mencionada arriba se sigue facilmente que si* f_n *tiende a* f *en* $\mathcal{L}(E,F)$*, entonces* f_n *tiende a* f *uniformemente sobre cada subconjunto acotado de* E*.*

Teorema 2.10. *Si* F *es un espacio de Banach, entonces también lo es* $\mathcal{L}(E,F)$*.*

Demostración. Consideremos una sucesión de Cauchy $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{L}(E,F)$. Para cada $x \in E$, la sucesión $f_n(x)$ es de Cauchy en F porque $\|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \|f_n - f_m\|\|x\|$. Escribamos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Las igualdades

$$f(x+x') = \lim_{n\to\infty} f_n(x+x') = \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(x') = f(x) + f(x')$$

y

$$f(\lambda \cdot x) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lambda \cdot f(x),$$

muestran que f es lineal. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_n - f_m\| < \epsilon$ si $n, m \geq n_0$. Entonces, para cada $x \in E$,

$$\|(f - f_m)(x)\| = \lim_{n\to\infty} \|(f_n - f_m)(x)\| \leq \epsilon\|x\| \tag{9}$$

y, por lo tanto,

$$\|f(x)\| \leq \|f_m(x)\| + \|(f-f_m)(x)\| < (\|f_m\| + \epsilon)\|x\|,$$

para todo $m > n_0$, lo que implica en particular que $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Por último, de la igualdad (9) se sigue que $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. □

Proposición 2.11. *Si* $f \in \mathcal{L}(E,F)$ *y* $g \in \mathcal{L}(F,G)$*, entonces* $g^\circ f \in \mathcal{L}(E,G)$ *y, además,* $\|g^\circ f\| \leq \|g\|\|f\|$*.*

Demostración. Porque $\|g(f(x))\| \leq \|g\|\|f(x)\| \leq \|g\|\|f\|\|x\|$ para todo $x \in E$. □

Proposición 2.12. *Una aplicación lineal continua* $f\colon E \to F$ *es una isometría si y sólo si* $\|f(x)\| = \|x\|$ *para todo* $x \in E$*.*

Demostración. Si f es una isometría, entonces

$$\|f(x)\| = d(f(x), 0) = d(x, 0) = \|x\|$$

para todo $x \in E$. Recíprocamente, si se satisface esta condición, entonces

$$d(f(x), f(x')) = \|f(x) - f(x')\| = \|f(x-x')\| = \|x - x'\| = d(x, x')$$

para todo $x, x' \in E$. □

Observación 2.13. *Si $f\colon V\to W$ es una isometría, entonces*

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

La recíproca no es cierta. Por ejemplo, el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ dado por $(x,y)\mapsto(x,0)$, tiene norma 1 y no es una isometría.

Proposición 2.14. *Si $f\colon E\to F$ es un isomorfismo, $\|f\|\le 1$ y $\|f^{-1}\|\le 1$, entonces f es una isometría.*

Demostración. Para cada $x\in E$,

$$\|x\| = \|f^{-1}\circ f(x)\| \le \|f^{-1}\|\|f(x)\| \le \|f(x)\|.$$

Pero por otra parte, $\|f(x)\|\le\|f\|\|x\|\le\|x\|$. □

Ejemplo 2.15. *La función $j\colon F\to\mathcal{L}(k,F)$, definida por $j(x)(\lambda)=\lambda\cdot x$, es evidentemente lineal. Además es claro que es inversible y que $j^{-1}(f)=f(1)$. Por último*

$$\|j\| = \sup_{\|x\|=1}\|j(x)\| = \sup_{\|x\|=1}\sup_{|\lambda|=1}\|j(x)(\lambda)\| = \sup_{\|x\|=1}\sup_{|\lambda|=1}|\lambda|\|x\| = 1$$

y

$$\|j^{-1}\| = \sup_{\|f\|=1}\|j^{-1}(f)\| = \sup_{\|f\|=1}\|f(1)\| \le \sup_{\|f\|=1}\|f\| = 1.$$

Así, por la Proposicion 2.14, j es una isometría. Notese que el argumento muestra también que $\mathrm{Hom}_k(k,F)=\mathcal{L}(k,F)$.

El resultado que sigue mejora el Ejercicio 1.38.

Teorema 2.16. *Si E es un espacio vectorial de dimensión finita, entonces todas las normas de E son equivalentes.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $E=k^n$ y que una de las normas es la norma $\|\ \|_\infty$. Denotemos con $\|\ \|$ a la otra norma y con $(\mathbf{e_1},\dots,\mathbf{e_n})$ a la base canónica de k^n. Cada vector $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in k^n$ satisface

$$\|\mathbf{x}\| = \|x_1\cdot\mathbf{e_1}+\dots+x_n\cdot\mathbf{e_n}\| \le |x_1|\|\mathbf{e_1}\|+\dots+|x_n|\|\mathbf{e_n}\| \le nM\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

donde $M=\text{máx}(\|\mathbf{e_1}\|,\dots,\|\mathbf{e_n}\|)$. Así, para todo par de vectores $\mathbf{x},\mathbf{y}\in k^n$,

$$|\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le nM\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_\infty.$$

En consecuencia, la aplicación $\|\ \|\colon(k^n,\|\ \|_\infty)\to k$ continua. Como $\{\mathbf{x}\in k^n : \|\mathbf{x}\|_\infty=1\}$ es compacto, existen $c_1,c_2>0$, tales que $c_1\le\|\mathbf{x}\|\le c_2$ para todo $\mathbf{x}\in k^n$ con $\|\mathbf{x}\|_\infty=1$. Pero esto implica que

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_\infty\left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\infty}\right\| \le c_2\|\mathbf{x}\|_\infty \qquad \text{y} \qquad \|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_\infty\left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_\infty}\right\| \ge c_1\|\mathbf{x}\|_\infty$$

para cada $\mathbf{x}\in k^n\setminus\{0\}$. □

Corolario 2.17. *Los siguientes hechos valen:*

1. *Cada k-espacio vectorial de dimensión finita es completo con cualquier norma.*
2. *En cualquier espacio normado los subespacios de dimensión finita son cerrados.*

Demostración. La primera afirmación se sigue inmediatamente del Teorema 2.16, y la segunda de la primera y de la Proposición 1.27. □

Proposición 2.18. *Si* $\dim_k(E) < \infty$*, entonces* $\mathrm{Hom}_k(E,F) = \mathcal{L}(E,F)$ *para todo espacio normado* F*.*

Demostración. Por el Teorema 2.16 basta probarlo cuando E es k^n provisto con la norma $\| \, \|_\infty$. En este caso toda transformación lineal $f\colon E \to F$ es acotada porque

$$\|f(\mathbf{x})\| = \|f(x_1 \cdot \mathbf{e_1} + \cdots + x_n \cdot \mathbf{e_n})\| \le |x_1|\|f(\mathbf{e_1})\| + \cdots + |x_n|\|f(\mathbf{e_n})\| \le M\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

donde $M = \|f(\mathbf{e_1})\| + \cdots + \|f(\mathbf{e_n})\|)$, cualquiera sea $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$. □

3.1. El Espacio Dual El *dual algebraico* de un espacio normado E es el k-espacio vectorial $\mathrm{Hom}_k(E,k)$ y el *espacio dual* de E es el espacio normado $E^* := \mathcal{L}(E,k)$. Un subespacio H de E es un *hiperplano* si existe $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(E,k)$ no nulo, tal que $H = \ker(\varphi)$.

Proposición 2.19. *Para cada subespacio* H *de* E*, son equivalentes:*

1. H *es un hiperplano.*
2. $H \subsetneq E$ *y si* L *es un subespacio de* E *tal que* $H \subsetneq L$*, entonces* $L = E$*.*
3. *Existe* $x \in E \setminus H$ *tal que* $\langle H, x\rangle = E$*.*

Demostración. 1. ⇒ 2. Consideremos una funcional lineal no nula $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(E,k)$ tal que $H = \ker(\varphi)$ y tomemos $x \in L$ tal que $\varphi(x) \neq 0$. Cada $y \in E$ se escribe como suma de un elemento de H y uno de L, en la forma

$$y = \left(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x\right) + \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)}x.$$

Como $H \subseteq L$, esto prueba que $L = E$.
2. ⇒ 3. Del item 2 se sigue inmediatamente que si $x \in E \setminus H$, entonces $\langle H, x\rangle = E$.
3. ⇒ 1. Basta definir $\varphi(h + \lambda \cdot x) = \lambda$ para todo $h \in H$ y $\lambda \in k$. □

Proposición 2.20. *Una funcional lineal* $\varphi\colon E \to k$ *es continua si y sólo si* $\ker(\varphi)$ *es cerrado.*

Demostración. Es claro que si φ es continua, entonces $\varphi^{-1}(0)$ es cerrado. Veamos que vale la recíproca. Evidentemente podemos suponer que $\varphi \neq 0$. Fijemos $x \in \varphi^{-1}(1)$ y escribamos $M = d(x, \varphi^{-1}(0))$. Como $\varphi^{-1}(0)$ es cerrado, $M > 0$. Dado $y \in V$, existen $\lambda \in k$ y $z \in \varphi^{-1}(0)$ únicos tales que $y = z + \lambda \cdot x$. Es evidente que $\lambda = \varphi(y)$. Si $y \notin \varphi^{-1}(0)$, entonces

$$\|y\| = \|z + \varphi(y) \cdot x\| = |\varphi(y)| \left\| \frac{1}{\varphi(y)} \cdot z + x \right\| \ge |\varphi(y)|M,$$

y es obvio que $\|y\| \ge |\varphi(y)|M$ si $y \in \varphi^{-1}(0)$. Así, $|\varphi(y)| \le \frac{1}{M}\|y\|$ para cada $y \in E$. □

Dados un espacio normado E y una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de E, la *serie* $\sum_{n=1}^\infty a_n$, de *término general* a_n, es la sucesión $(S_1, S_2, \dots)$, donde $S_i = \sum_{n=1}^i a_n$. Una serie $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es *convergente* si existe $\lim_{i\to\infty} S_i = s$. En tal caso decimos que s es el *límite* o la suma de la serie y escribimos $s = \sum_{n=1}^\infty a_n$. Finalmente, decimos que $\sum_{n=1}^\infty a_n$ es *absolútamente convergente* si la serie de números reales $\sum_{n=1}^\infty \|a_n\|$ converge.

Proposición 2.21. *Toda serie* $\sum_{n=1}^\infty a_n$*, de elementos de un espacio de Banach* E*, que es absolutamente convergente, es convergente.*

Demostración. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|$ es de Cauchy y

$$\|a_{n_0} + \cdots + a_{m_0}\| \leq \|a_{n_0}\| + \cdots + \|a_{m_0}\| \quad \text{para todo } n_0 < m_0,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de Cauchy y, por lo tanto, siendo E un espacio de Banach, convergente. □

Proposición 2.22. *Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de elementos de un espacio de Banach E es absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_{j(n)}$ es absolutamente convergente para cada función biyectiva $j\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y además, $\sum_{n=1}^{\infty} a_{j(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Demostración. Dejada al lector. □

Teorema 2.23. *Para cada $p \in \mathbb{R}_{\geq 1}$ hay una isometría biyectiva $\mathfrak{f}\colon l_q \to l_p^*$, donde q está determinado por la igualdad $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Demostración. Fijemos $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots) \in l_q$. Por la desigualdad de Holder,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |y_i x_i| \leq \|\mathbf{y}\|_q \|\mathbf{x}\|_p \quad \text{para todo } \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l_p, \tag{10}$$

(la desigualdad de Holder fue establecida para $p > 1$, pero vale trivialmente para $p = 1$, con $q = \infty$). En consecuencia la serie $\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i$ converge absolutamente. Por lo tanto esta fórmula define una función $\varphi_{\mathbf{y}}\colon l_p \to k$, que claramente es lineal. Además

$$\|\varphi_{\mathbf{y}}\| \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} |\varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{x})| = \sup_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \left| \sum_{i=1}^{\infty} y_i x_i \right| \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \sum_{i=1}^{\infty} |y_i x_i| \leq \sup_{\|\mathbf{x}\|_p = 1} \|\mathbf{y}\|_q \|\mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{y}\|_q,$$

lo que muestra en particular que $\varphi_{\mathbf{y}} \in l_p^*$. Es claro que la aplicación $\mathfrak{f}\colon l_q \to l_p^*$, definida por $\mathfrak{f}(\mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{y}}$, es lineal, y que

$$\|\mathfrak{f}\| = \sup_{\|\mathbf{y}\| = 1} \mathfrak{f}(\mathbf{y}) = \sup_{\|\mathbf{y} = 1\|} \|\varphi_{\mathbf{y}}\| \leq \sup_{\|\mathbf{y} = 1\|} \|\mathbf{y}\|_q \leq 1.$$

Además es inyectiva, ya que si $\mathbf{e_i}$ es el elemento de l_p cuyas coordenadas son todas 0, salvo la i-ésima, que vale 1, entonces $\mathfrak{f}(\mathbf{y})(\mathbf{e_i}) = \varphi_{\mathbf{y}}(\mathbf{e_i}) = y_i$. Resta ver que $\mathfrak{f}$ es una isometría sobreyectiva. Por la Proposición 2.14, para ello es suficiente ver que existe una trasnsformación lineal $\mathfrak{g}\colon l_p^* \to l_q$ tal que $\|\mathfrak{g}\| \leq 1$ y $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{g} = \mathrm{id}$. Dado $\varphi \in l_p^*$ definimos

$$\mathfrak{g}(\varphi) = (\varphi(\mathbf{e_1}), \varphi(\mathbf{e_2}), \varphi(\mathbf{e_3}), \dots).$$

Veamos que $\mathfrak{g}(\varphi) \in l_q$ y que $\|\mathfrak{g}(\varphi)\|_q \leq \|\varphi\|$. Consideramos dos casos:

$p = 1$. En este caso $\|\varphi(\mathbf{e_i}))\| \leq \|\varphi\| \|\mathbf{e_i}\|_1 = \|\varphi\|$ para cada $i \in \mathbb{N}$ y, por lo tanto,

$$\|\mathfrak{g}(\varphi)\|_\infty = \|\varphi(\mathbf{e_1}), \varphi(\mathbf{e_2}), \dots\|_\infty \leq \|\varphi\|,$$

lo que prueba simultaneamente ambas afirmaciones.

$p > 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotemos con $\mathbf{x^{(n)}}$ a la sucesión $\mathbf{x^{(n)}} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, x_3^{(n)}, \dots)$, definida por

$$x_i^{(n)} = \begin{cases} |\varphi(\mathbf{e_i})|^{q-1} \operatorname{sg}(\varphi(\mathbf{e_i})) & \text{si } i \leq n, \\ 0 & \text{si } i > n, \end{cases}$$

donde sg denota a la función signo. Es claro que $\mathbf{x^{(n)}} \in l_p$ para todo n. Un cálculo directo muestra que

$$\varphi(\mathbf{x^{(n)}}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{(n)} \varphi(\mathbf{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{e_i})|^{q-1} \operatorname{sg}(\varphi(\mathbf{e_i})) \varphi(\mathbf{e_i}) = \sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{e_i})|^q.$$

Así,

$$\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{e_i})|^q = |\varphi(\mathbf{x^{(n)}})| \leq \|\varphi\| \|\mathbf{x^{(n)}}\|_p = \|\varphi\| \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{e_i})|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \|\varphi\| \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{e_i})|^q \right)^{\frac{1}{p}},$$

por lo que

$$\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n} |\varphi(\mathbf{e_i})|^q} \leq \|\varphi\|.$$

Haciendo tender n a infinito, obtenemos que $\|\mathfrak{g}(\varphi)\|_q \leq \|\varphi\|$. Igual que en el caso anterior, esto prueba simultaneamente ambas afirmaciones.

Para terminar la demostración sólo falta probar que $\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\varphi)) = \varphi$ para todo $\varphi \in l_p^*$. Pero si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_p$, entonces

$$\mathfrak{f}(\mathfrak{g}(\varphi))(\mathbf{x}) = \mathfrak{f}(\varphi(\mathbf{e_1}), \varphi(\mathbf{e_2}), \varphi(\mathbf{e_3}), \dots)(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \varphi(\mathbf{e_i}) = \varphi(\mathbf{x}),$$

donde la última igualdad se sigue de que

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathbf{e_i} \right\|_p = \left(\sum_{i>n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n \text{ tiende a } \infty,$$

y, por lo tanto, $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbf{e_i}$ en l_p. □

Teorema 2.24 (Hahn-Banach). *Para cada espacio normado E, cada subespacio $S \subseteq E$ y cada funcional $\varphi \in S^*$, existe $\widetilde{\varphi} \in E^*$ tal que $\widetilde{\varphi}_{|S} = \varphi$ y $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demostración. $\boxed{\text{Caso } k = \mathbb{R}}$ Consideremos las extensiones parciales de φ. Es decir, los pares (W, ψ), formados por un subespacio W de E tal que $S \subseteq W$ y una funcional $\psi \in W^*$ tal que $\psi_{|S} = \varphi$ y $\|\psi\| = \|\varphi\|$. Ordenamos estas extensiones por $(W, \psi) \leq (W', \psi')$ si $W \subseteq W'$ y $\psi'_{|W} = \psi$. Por el Lema de Zorn existe una extensión maximal $(\widetilde{W}, \widetilde{\psi})$. Debemos probar que $\widetilde{W} = E$, para lo cual mostraremos que si $\widetilde{W} \subsetneq E$ y $x \in E \setminus \widetilde{W}$, entonces $\widetilde{\psi}$ se puede extender a una $\phi \in (\widetilde{W} \oplus \langle x \rangle)^*$ tal que $\|\phi\| = \|\widetilde{\psi}\|$. Dando por hecho el caso trivial $\widetilde{\psi} = 0$, y multiplicando por una constante, podemos suponer que $\|\widetilde{\psi}\| = 1$. Definimos $\phi(w + \lambda \cdot x) = \widetilde{\psi}(w) + \lambda a$, con $a \in \mathbb{R}$ fijo. Debemos ver que se puede elegir a de forma tal que $\|\phi\| \leq \|\widetilde{\psi}\| = 1$. Es decir, de forma tal que $|\widetilde{\psi}(w) + \lambda a| \leq \|w + \lambda \cdot x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $w \in \widetilde{W}$. Reemplazando w por $\lambda \cdot w$ es fácil ver que para ello será suficiente elegir a tal que $|\widetilde{\psi}(w) + a| \leq \|w + x\|$ para todo $w \in \widetilde{W}$, o equivalentemente, tal que

$$-\widetilde{\psi}(w) - \|w + x\| \leq a \leq -\widetilde{\psi}(w) + \|w + x\| \quad \text{para todo } w \in \widetilde{W}.$$

Así, hemos reducido la cuestión a probar que

$$\sup_{w \in \widetilde{W}} (-\widetilde{\psi}(w) - \|w + x\|) \leq \inf_{v \in \widetilde{W}} (-\widetilde{\psi}(v) + \|v + x\|)$$

o, lo que es igual, que $-\widetilde{\psi}(w) - \|w + x\| \leq -\widetilde{\psi}(v) + \|v + x\|$ para todo $v, w \in \widetilde{W}$. Pero

$$\widetilde{\psi}(v) - \widetilde{\psi}(w) \leq |\widetilde{\psi}(v - w)| \leq \|v - w\| = \|(v + x) - (w + x)\| \leq \|v + x\| + \|w + x\|,$$

donde la segunda desigualdad vale porque $\|\widetilde{\psi}\| = 1$.

$\boxed{\text{Caso } k = \mathbb{C}}$ Denotemos con ψ a la parte real de φ. Como

$$\psi(i \cdot v) = \Re\mathrm{e}(\varphi(i \cdot v)) = \Re\mathrm{e}(i\varphi(v)) = -\Im\mathrm{m}(\varphi(v))$$

para todo $v \in S$, sabemos que $\varphi(v) = \psi(v) - i\psi(i \cdot v)$ para todo $v \in S$. Por el caso real, también sabemos que hay una extensión $\widetilde{\psi}\colon E \to \mathbb{R}$ que satisface $\|\widetilde{\psi}\| = \|\psi\|$. Pero entonces la función $\widetilde{\varphi}(v)$, definida por $\widetilde{\varphi}(v) := \widetilde{\psi}(v) - i\widetilde{\psi}(i \cdot v)$, extiende a φ. Además, se comprueba fácilmente que $\widetilde{\varphi}(v)$ es $\mathbb{C}$-lineal. Por último, dado que para todo $v \in E$ tal que $\widetilde{\varphi}(v) \neq 0$,

$$|\widetilde{\varphi}(v)| = \widetilde{\varphi}\big(\widetilde{\varphi}(v)^{-1}|\widetilde{\varphi}(v)|v\big) = \widetilde{\psi}\big(\widetilde{\varphi}(v)^{-1}|\widetilde{\varphi}(v)|v\big) \le \|\widetilde{\psi}\|\|\widetilde{\varphi}(v)^{-1}|\widetilde{\varphi}(v)|v\| = \|\widetilde{\psi}\|\|v\|,$$

la desigualdad $\|\widetilde{\varphi}\| \le \|\widetilde{\psi}\| = \|\psi\| \le \|\varphi\|$ vale. □

COROLARIO 2.25. *Dados un subespacio cerrado S de E y un punto $x \in E \setminus S$, existe una funcional lineal $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) = 1$ y $\varphi_{|S} = 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la función lineal $\varphi\colon S \oplus \langle x \rangle \to k$, definida por

$$\varphi(s + \lambda \cdot x) = \lambda \quad \text{para todo } s \in S \text{ y todo } \lambda \in k.$$

Por la Proposición 2.20, como $\ker(\varphi) = S$ es cerrado, φ es continua. La demostración se termina aplicando el teorema anterior. □

COROLARIO 2.26. *Dados $x, y \in E$ tales que $\langle x \rangle \cap \langle y \rangle = \{0\}$, existe un funcional $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(x) = 0$ y $\varphi(y) = 1$. En particular, si $E \neq 0$, entonces $E^* \neq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Esto es consecuencia del corolario anterior y del hecho de que por el Corolario 2.17, el subespacio $S = \langle x \rangle$ de E, es cerrado. □

TEOREMA 2.27. *Si $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio de Banach y $E \neq 0$, entonces F también es un espacio de Banach.*

DEMOSTRACIÓN. Fijemos una funcional $\varphi \in E^*$ no nula y un punto $x_0 \in E$ tal que $\varphi(x_0) = 1$. Dado $y \in F$, definimos $f_y\colon E \to F$ por $f_y(x) = \varphi(x) \cdot y$. Es evidente que f_y es lineal, y es continua porque

$$\|f_y(x)\| = \|\varphi(x) \cdot y\| \le \|y\|\|\varphi\|\|x\|.$$

Además, la correspondencia

$$\begin{aligned} F &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ y &\longmapsto f_y \end{aligned}$$

es lineal y satisface

$$\|f_y\| = \sup_{\|x\|=1} \|f_y(x)\| = \|y\| \sup_{\|x\|=1} |\varphi(x)| = \|y\|\|\varphi\|.$$

En consecuencia, si $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en F, entonces la sucesión $(f_{y_n})_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathcal{L}(E, F)$ y, por lo tanto, como $\mathcal{L}(E, F)$ es completo, converge en $\mathcal{L}(E, F)$ a una función lineal $f\colon E \to F$. Pero entonces

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_{y_n}(x_0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_0) \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} y_n,$$

lo que prueba en particular que F es completo. □

PROPOSICIÓN 2.28. *Si un espacio normado E tiene una sucesión de elementos*

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

que genera un subespacio denso, entonces es separable.

Demostración. Consideremos el $\mathbb{Q}$-subespacio vectorial

$$\langle x_1, x_2, \dots \rangle_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot x_i : \lambda_i \in \mathbb{Q} \text{ y } \natural\{i : \lambda_i \neq 0\} < \infty\} & \text{si } k = \mathbb{R}, \\ \{\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \cdot x_i : \lambda_i \in \mathbb{Q}[i] \text{ y } \natural\{i : \lambda_i \neq 0\} < \infty\} & \text{si } k = \mathbb{C}, \end{cases}$$

de E. Es fácil ver que $\langle x_1, x_2, \dots \rangle_{\mathbb{Q}}$ es numerable y $\overline{\langle x_1, x_2, \dots \rangle_{\mathbb{Q}}} = \overline{\langle x_1, x_2, \dots \rangle} = E$. □

Corolario 2.29. *Los espacios l_p ($1 \leq p < \infty$) son separables.*

Demostración. Por la Proposición 2.28, para verificar esto basta recordar que en la parte final de la demostración del Teorema 2.23 se probó que el conjunto $\{\mathbf{e_i} : i \in \mathbb{N}\}$, donde $\mathbf{e_i}$ es el elemento de l_p cuyas coordenadas son todas 0, salvo la i-ésima, que vale 1, genera un subespacio denso de l_p. □

El espacio de Banach l_∞ no es separable, porque dado un conjunto numerable arbitrario $\{\mathbf{x}_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots) : i \in \mathbb{N}\} \subseteq l_\infty$, la sucesión $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, dedinida por

$$y_j = \begin{cases} 0 & \text{si } |x_{j_j}| \geq 1, \\ 2 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

está a una distancia mayor o igual a 1 de cada $\mathbf{x_i}$.

Teorema 2.30. *Si E^* es separable, entonces también lo es E.*

Demostración. Por el Corolario 2.26, si $E^* = 0$, entonces $E = 0$ y, en particular, separable. Supongamos que $E^* \neq 0$. Por hipótesis E^* tiene un subconjunto numerable denso $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ tomemos $x_n \in E$ tal que $\|x_n\| = 1$ y $\|\varphi_n\| \leq |\varphi_n(x_n)| + \frac{1}{n}$. Por la Proposición 2.28, para terminar la demostración será suficiente probar que

$$S := \overline{\langle x_1, x_2, \dots \rangle} = E.$$

Supongamos que no es así y, fijado $x \in E \setminus S$, consideremos la funcional $\psi \colon S \oplus \langle x \rangle \to k$, definida por $\psi(s + \lambda \cdot x) = \lambda$ para todo $s \in S$ y $\lambda \in k$. Notemos que ψ es continua porque $\ker \psi = S$ es cerrado. Por el Teorema de Hahn-Banach, ψ tiene una extensión $\widetilde{\psi} \in E^*$. Por la densidad de $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$, existe una sucesión $(\varphi_{n_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de elementos de este conjunto que tiende a $\widetilde{\psi}$. Por un lado

$$\lim_{j \to \infty} |\varphi_{n_j}(x_{n_j})| = \|\widetilde{\psi}\|,$$

porque $\|\varphi_{n_j}\| \to \|\widetilde{\psi}\|$ y $||\varphi_{n_j}(x_{n_j})| - \|\varphi_{n_j}\|| < \frac{1}{n_j}$. Por otro lado

$$|\varphi_{n_j}(x_{n_j})| = |\varphi_{n_j}(x_{n_j}) - \widetilde{\psi}(x_{n_j})| \leq \|\varphi_{n_j} - \widetilde{\psi}\| \|x_{n_j}\| = \|\varphi_{n_j} - \widetilde{\psi}\| \longrightarrow 0,$$

porque $\widetilde{\psi}$ se anula sobre S. Así, $\widetilde{\psi} = 0$, lo que es absurdo porque $\widetilde{\psi}(x) = 1$. □

Corolario 2.31. *l_∞^* no es isomorfo a l_1.*

Teorema 2.32. *(Teorema de acotación uniforme) Consideremos una familia de funciones lineales continuas $(f_\lambda \colon E \to F)_{\lambda \in \Lambda}$, donde E y F son espacios normados. Si E es de Banach y para cada $x \in E$ existe $M_x \geq 0$ tal que $\|f_\lambda(x)\| \leq M_x$ para todo λ, entonces existe $M \geq 0$ tal que $\|f_\lambda\| \leq M$ para todo λ.*

Demostración. Por el principio de acotación uniforme (Teorema 1.56) existe una bola abierta $\mathrm{B}_\delta(x_0)$ y un $N \geq 0$ tal que $\|f_\lambda(x)\| \leq N$ para todo $\lambda \in \Lambda$ y todo $x \in \mathrm{B}_\delta(x_0)$. Si $x \in \mathrm{B}_\delta(0)$, entonces

$$\|f_\lambda(x)\| = \|f_\lambda(x + x_0) - f_\lambda(x_0)\| \leq \|f_\lambda(x + x_0)\| + \|f_\lambda(x_0)\| \leq N + M_{x_0}.$$

así, para cada $x \in \mathrm{B}_1(0)$,

$$\|f_\lambda(x)\| = \frac{1}{\delta}\|f_\lambda(\delta \cdot x)\| \leq \frac{1}{\delta}(N + M_{x_0}).$$

De modo que podemos tomar $M = \frac{1}{\delta}(N + M_{x_0})$. □

Recordemos que un álgebra conmutativa sobre un cuerpo k es un anillo conmutativo A junto con un morfismo de anillos $i\colon k \to A$. Una k-*álgebra* (no necesariamente conmutativa) es un anillo A junto con un morfismo de anillos $i\colon k \to A$ tal que $i(\lambda)a = ai(\lambda)$ para todo $a \in A$ y $\lambda \in k$. Por ejemplo, para cada cuerpo k el anillo de matrices $M_n(k)$ es un álgebra via la aplicación $i\colon k \to M_n(k)$ definida por $i(\lambda) := \lambda \cdot I$, donde I es la matriz identidad. Si A es una k-álgebra, entonces A es un k-espacio vectorial via $\lambda \cdot a := i(\lambda)a$, y

$$\lambda \cdot (ab) = (\lambda \cdot a)b = a(\lambda \cdot b) \tag{11}$$

para todo $\lambda \in k$ y $a, b \in A$. Recíprocamente, cada anillo A provisto de una estructura de k espacio vectorial que satisface (11) es una k-álgebra con $i(\lambda) := \lambda \cdot 1$.

Un *álgebra de Banach* es una k-álgebra A, dotada de una estructura de espacio de Banach tal que $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$ para todo $a, b \in A$. Notemos $\|1\| \geq 1$ en toda álgebra de Banach, porque $\|1\| \neq 0$ y

$$\|1\| = \|1 \times 1\| \leq \|1\|^2.$$

Del Teorema 2.10 y la Proposición 2.11 se sigue inmediatamente que $\mathcal{L}(E)$ es un álgebra de Banach. El morfismo de estructura $i\colon k \to \mathcal{L}(E)$ está dado por $i(\lambda) = \lambda \cdot \mathrm{id}_E$.

3.2. Elementos Inversibles de $\mathcal{L}$(E) En esta subsección establecemos algunas propiedades básicas del grupo de unidades del álgebra de funciones lineales continuas $\mathcal{L}(E)$ de un espacio de Banach E o, más generalmente, del grupo de unidades de un álgebra de Banach.

Observación 2.33. *Dada un álgebra de Banach A, la serie $e^x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ es convergente para cada $x \in A$, porque lo es absolutamente. La función $x \mapsto e^x$, definida por esta serie es, por definición, la función exponencial de A.*

Ejercicio 2.34. *Pruebe que la función exponencial de un álgebra de Banach A tiene las siguientes propiedades:*

- $e^0 = 1$.
- *Si x, y son elementos de A que conmutan, entonces $e^{x+y} = e^x e^y$.*
- *e^x es inversible para todo $x \in A$ y $(e^x)^{-1} = e^{-x}$.*

Dada una álgebra A, denotamos con $U(A)$ al grupo de elementos inversibles de A.

Lema 2.35. *Si A es un álgebra de Banach, entonces* $1 - \mathrm{B}_1(0) \subseteq U(A)$.

Demostración. Si $x \in \mathrm{B}_1(0)$, entonces $1 + x + x^2 + \cdots$ es absolutamente convergente porque

$$1 + \|x\| + \|x^2\| + \cdots \leq 1 + \|x\| + \|x\|^2 + \cdots = \frac{1}{1 - \|x\|}.$$

Además,

$$(1 - x)(1 + x + x^2 + \cdots) = \lim_{n \to \infty} 1 - x^{n+1} = 1,$$

y $(1 + x + x^2 + \cdots)(1 - x) = 1$ por la misma razón. □

Teorema 2.36. *Si A es un álgebra de Banach, entonces $U(A)$ es abierto.*

Demostración. Debemos probar que para cada $x_0 \in U(A)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\mathrm{B}_\delta(x_0) \subseteq U(A),$$

o lo que es equivalente, que $x_0^{-1}(x_0 + x) = 1 + x_0^{-1}x$ es inversible para todo $x \in \mathrm{B}_\delta(0)$. Pero por el Lema 2.35, para que esto último ocurra es suficiente tomar $\delta = \|x_0^{-1}\|^{-1}$, porque entonces $\|x_0^{-1}x\| \leq \|x_0^{-1}\|\|x\| < 1$. □

Teorema 2.37. *Si A es un álgebra de Banach, entonces la correspondencia $x \mapsto x^{-1}$ es una función continua de $U(A)$ en si mismo.*

Demostración. Tomemos $x_0 \in U(A)$ y $x \in \mathrm{B}_{\|x_0^{-1}\|^{-1}}(0)$. Los argumentos dados en la demostración del Teorema 2.36 prueban que $x_0 - x$ es inversible. Usando que

$$(x_0 - x)^{-1} = (1 - x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1}$$

y

$$(1 - x_0^{-1}x)^{-1} = 1 + x_0^{-1}x + (x_0^{-1}x)^2 + (x_0^{-1}x)^3 + \cdots,$$

obtenemos la siguiente acotación:

$$\begin{aligned}
\|(x_0 - x)^{-1} - x_0^{-1}\| &= \|(1 - x_0^{-1}x)^{-1}x_0^{-1} - x_0^{-1}\| \\
&\leq \|(1 - x_0^{-1}x)^{-1} - 1\|\|x_0^{-1}\| \\
&= \left\| \sum_{n=1}^{\infty} (x_0^{-1}x)^n \right\| \|x_0^{-1}\| \\
&\leq \|x_0^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_0^{-1}\|\|x\|)^n \\
&= \frac{\|x_0^{-1}\|\|x\|}{1 - \|x_0^{-1}\|\|x\|}\|x_0^{-1}\|.
\end{aligned}$$

El resultado es ahora evidente porque es claro que $\frac{\|x_0^{-1}\|\|x\|}{1 - \|x_0^{-1}\|\|x\|}\|x_0^{-1}\|$ tiende a 0 cuando x tiende a 0. □

3.3. El Teorema de la Función Abierta Recordemos que una función $f\colon X \to Y$, de un espacio métrico X en otro Y, es abierta si $f(U)$ es abierto en Y para cada abierto U de X.

Teorema 2.38 (Teorema de la función abierta). *Consideremos espacios de Banach E y F. Toda función lineal, continua y sobreyectiva $f\colon E \to F$, es abierta.*

Demostración. Por el Teorema 1.45, como

$$F = \bigcup_{i=1}^{\infty} f(\mathrm{B}_i^E(0)) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{f(\mathrm{B}_i^E(0))},$$

existen $n \in \mathbb{N}$ e $y \in F$ tales que $\overline{f(\mathrm{B}_n^E(0))} \supseteq \mathrm{B}_r^F(y)$ para algún $r > 0$. Si $x \in f^{-1}(y)$, entonces $\overline{f(\mathrm{B}_{n+\|x\|}^E(0))} \supseteq \mathrm{B}_r^F(0)$. En efecto, si $z \in \mathrm{B}_r^F(0)$, entonces $z' = z + y \in \mathrm{B}_r^F(y) \subseteq \overline{f(\mathrm{B}_n^E(0))}$, y así,

$$z = z' - y \in \overline{f(\mathrm{B}_n^E(0))} - f(x) \subseteq \overline{f(\mathrm{B}_{n+\|x\|}^E(0))}.$$

Tomemos $\lambda > 1$ tal que $n + \|x\| \leq \lambda r$. Es evidente que $\overline{f(\mathrm{B}_{\lambda r}^E(0))} \supseteq \mathrm{B}_r^F(0)$. De hecho vale algo que aparentemente es más fuerte aunque en realidad es equivalente: que $\overline{f(\mathrm{B}_{\lambda t}^E(0))} \supseteq \mathrm{B}_t^F(0)$ para todo $t > 0$. En efecto, dado $y \in \mathrm{B}_t^F(0)$, existe una sucesión de puntos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{B}_{\lambda r}^E(0)$ tal que $\frac{r}{t} \cdot y = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$. Es claro entonces que $y = \lim_{n\to\infty} f(\frac{t}{r} \cdot x_n)$ y así $y \in \overline{f(\mathrm{B}_{\lambda t}^E(0))}$. Vamos a probar que $f(\mathrm{B}_{2\lambda t}^E(0)) \supseteq \mathrm{B}_t^F(0)$. Fijemos $y \in \mathrm{B}_t^F(0)$ y $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Tomemos primero $x_1 \in \mathrm{B}_{\lambda t}^E(0)$ tal que $y - f(x_1) \in \mathrm{B}_{\delta t}^F(0)$, luego tomemos $x_2 \in \mathrm{B}_{\lambda\delta t}^E(0)$ tal que $y - (f(x_1) + f(x_2)) \in \mathrm{B}_{\delta^2 t}^F(0)$, etcetera. Existen así $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \in E$, tales que $x_n \in \mathrm{B}_{\lambda\delta^{n-1}t}^E(0)$ y $y - \sum_{i=1}^n f(x_i) \in \mathrm{B}_{\delta^n t}^F(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{i=1}^\infty x_i$ es absolutamente convergente ya que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\delta^{i-1}t = \frac{\lambda t}{1-\delta} < 2\lambda t.$$

Además, si $x = \sum_{i=1}^\infty x_i$, entonces $\|x\| \leq \sum_{i=1}^\infty \|x_i\| < 2\lambda t$ y $f(x) = y$, lo que prueba la afirmación. Consideremos ahora un abierto U de V y un punto x de U. Tomemos $t > 0$ tal que $\mathrm{B}_{2\lambda t}^V(x) \subseteq U$. Entonces

$$f(U) \supseteq f(\mathrm{B}_{2\lambda t}^E(x)) = f(x + \mathrm{B}_{2\lambda t}^E(0)) = f(x) + f(\mathrm{B}_{2\lambda t}^E(0)) \supseteq f(x) + \mathrm{B}_t^F(0) = \mathrm{B}_t^F(f(x)),$$

lo cual muestra que $f(U)$ es abierto. □

Corolario 2.39. *Si $f\colon E \to F$ es una función lineal continua y biyectiva entre espacios de Banach, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración. Se sigue del teorema anterior y de la Observación 1.21. □

Recordemos que un espacio vectorial E es *suma directa interna* de dos subespacios F_1 y F_2 si la función lineal $j\colon F_1 \times F_2 \to E$, definida por $j(y, y') = y + y'$ es biyectiva. Notemos que si E es un espacio normado y dotamos a $F_1 \times F_2$ con la norma indicada arriba del Teorema 2.3, entonces la función j deviene continua.

Corolario 2.40. *Si un espacio de Banach E es suma directa interna de dos subespacios cerrrados F_1 y F_2, entonces la aplicación $j\colon F_1 \times F_2 \to E$ definida arriba es un isomorfismo de espacios de Banach.*

Demostración. Es facil ver, usando que F_1 y F_2 son subconjuntos cerrados de E y que E es un espacio de Banach, que $F_1 \times F_2$ también lo es. Entonces, por el Corolario 2.39, j es un isomorfismo. □

Ejercicio 2.41. *Pruebe que si X e Y son espacios métricos y $f\colon X \to Y$ es una función continua, entonces su* gráfico

$$\mathrm{Gr}(f) := \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\}$$

es un subconjunto cerrado de $X \times Y$ (Recuerdese que $X \times Y$ es un espacio métrico via la distancia d_∞ introducida en el item 6 del Ejemplo 1.1).

El corolario que sigue muestra que para las funciones lineales entre espacios de Banach vale la recíproca del resultado establecido en el ejercicio anterior.

Corolario 2.42. *Consideremos una función lineal $f\colon E \to F$ entre espacios de Banach. Si el gráfico de f es cerrado en $E \times F$, entonces f es continua.*

Demostración. Consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Gr}(f) \arrow[r, "\pi_F"] \arrow[d, "\pi_E"'] & F \\ E \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

donde π_E y π_F son las funciones definidas por $\pi_E(x,y) = x$ y $\pi_F(x,y) = y$. Es facil ver que π_E y π_F son continuas y que π_E es biyectiva. Por el Teorema de la función abierta sabemos que π_E^{-1} es continua. Entonces $f = \pi_F \circ \pi_E^{-1}$ también lo es. □

4. Funciones multilineales

Una función $f\colon E_1 \times \cdots \times E_n \to F$, del producto de una familia $E_1, \dots, E_n$ de k-espacios vectoriales en un k-espacio vectorial F, es multilineal si para todo i con $1 \le i \le n$ y toda familia $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ con $x_j \in E_j$, la aplicación $x \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)$ es una función lineal de E_i en F. El conjunto de todas las aplicaciones multilineales de $E_1 \times \cdots \times E_n$ en F, provisto de la suma y el producto por escalares definidos por

$$(f+g)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n)$$

y

$$(\lambda \cdot f)(x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

es un k-espacio vectorial, llamado *espacio* de las *funciones multilinealeas* de $E_1 \times \cdots \times E_n$ en F y denotado $\mathrm{Mult}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Teorema 2.43. *La función*

$$\Psi\colon \mathrm{Mult}(E_1, \dots, E_n; F) \longrightarrow \mathrm{Mult}(E_1, \dots, E_{n-1}; \mathrm{Hom}_k(E_n, F)),$$

definida por $\Psi(f)(x_1, \dots, x_{n-1})(x) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x)$, es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Demostración. Las igualdades

$$\begin{aligned} \Psi(f+g)(x_1, \dots, x_{n-1})(x) &= (f+g)(x_1, \dots, x_{n-1}, x) \\ &= f(x_1, \dots, x_{n-1}, x) + g(x_1, \dots, x_{n-1}, x) \\ &= \Psi(f)(x_1, \dots, x_{n-1})(x) + \Psi(g)(x_1, \dots, x_{n-1})(x) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda\cdot f)(x_1,\dots,x_{n-1})(x) &= (\lambda\cdot f)(x_1,\dots,x_{n-1},x)\\ &= \lambda f(x_1,\dots,x_{n-1},x)\\ &= \lambda\Psi(f)(x_1,\dots,x_{n-1})(x)\\ &= (\lambda\cdot(\Psi(f)(x_1,\dots,x_{n-1})))(x)\\ &= (\lambda\cdot\Psi(f))(x_1,\dots,x_{n-1})(x),\end{aligned}$$

muestran que Ψ es lineal. Por último, es facil ver que Ψ es inversible, y que su inversa es la función $\Phi\colon \mathrm{Mult}(E_1,\dots,E_{n-1};\mathrm{Hom}_k(E_n,F)) \longrightarrow \mathrm{Mult}(E_1,\dots,E_n;F)$, definida por $\Phi(g)(x_1,\dots,x_n) = g(x_1,\dots,x_{n-1})(x_n)$. □

TEOREMA 2.44. *Dados espacios normados $E_1,\dots,E_n,F$ y $f\in \mathrm{Mult}(E_1,\dots,E_n;F)$, son equivalentes:*

1. *f es continua en 0.*
2. *f es continua.*
3. *Existe $M\ge 0$ tal que*

$$\|f(x_1,\dots,x_n)\| \le M\|x_1\|\cdots\|x_n\|$$

para todo $(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$.

DEMOSTRACIÓN. 3. ⇒ 2. Fijemos $(x_1,\dots,x_n)\in E_1\times\cdots\times E_n$. Para todo elemento $(y_1,\dots,y_n)$ de $E_1\times\cdots\times E_n$ es verdad que

$$\begin{aligned}f(y_1,\dots,y_n)-f(x_1,\dots,x_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(x_1,\dots,x_{i-1},y_i,\dots,y_n)-f(x_1,\dots,x_i,y_{i+1},\dots,y_n)\\ &= \sum_{i=1}^{n} f(x_1,\dots,x_{i-1},y_i-x_i,y_{i+1},\dots,y_n).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|f(y_1,\dots,y_n)-f(x_1,\dots,x_n)\| &\le \sum_{i=1}^{n}\|f(x_1,\dots,x_{i-1},y_i-x_i,y_{i+1},\dots,y_n)\|\\ &\le \sum_{i=1}^{n} M\|x_i\|\cdots\|x_{i-1}\|\|y_i-x_i\|\|y_{i+1}\|\cdots\|y_n\|\end{aligned}$$

Usando esta acotación es fácil ver que f es continua en $(x_1,\dots,x_n)$.

2. ⇒ 1. Es evidente.

1. ⇒ 3. Por la continuidad de f en 0, existe $\delta>0$ tal que si $(x_1,\dots,x_n)\in \mathrm{B}_\delta(0)\times\cdots\times\mathrm{B}_\delta(0)$, entonces $\|f(x_1,\dots,x_n)\|<1$. De esto se sigue que para todo $\delta'<\delta$ y cada n-upla $(x_1,\dots,x_n)$

con $x_i \in E_i \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}\|f(x_1,\dots,x_n)\| &= \left\| f\left(\frac{\|x_1\|}{\delta'}\cdot y_1,\dots,\frac{\|x_n\|}{\delta'}\cdot y_n\right)\right\| \\ &= \frac{\|x_1\|\cdots\|x_n\|}{\delta'^n}\|f(y_1,\dots,y_n)\| \\ &< \frac{1}{\delta'^n}\|x_1\|\cdots\|x_n\|,\end{aligned}$$

donde $y_j = \frac{\delta'}{\|x_j\|}\cdot x_j$. Como claramente esta desigualdad vale también cuando alguno, o varios de los x_i's se anulan, podemos tomar $M = \frac{1}{\delta'^n}$. $\square$

Dados espacios normados $E_1,\dots,E_n$ y F, denotamos con $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)$ al subespacio de $\mathrm{Mult}(E_1,\dots,E_n;F)$ formado por las funciones multilineales continuas. Para cada $f \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)$, definimos la *norma* $\|f\|$ de f por

$$\|f\| = \text{mín}\{M : \|f(x_1,\dots,x_n)\| \le M\|x_1\|\cdots\|x_n\| \text{ para todo } (x_1,\dots,x_n) \in E_1\times\cdots\times E_n\}.$$

Usando el resultado que sigue es fácil probar por inducción en n que

$$\|f\| = \sup_{(x_1,\dots x_n)\in \mathrm{B}_1(0)\times\cdots\times B_1(0)} \|f(x_1,\dots x_n)\|$$

y que la correspondencia $f \mapsto \|f\|$ es una norma sobre $\mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)$.

Teorema 2.45. *Dados espacios normados $E_1,\dots,E_n$ y F, la aplicación Ψ introducida en el Teorema 2.43 induce por restricción un isomorfismo de espacios vectoriales*

$$\widetilde{\Psi}\colon \mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1,\dots,E_{n-1};\mathcal{L}(E_n,F)).$$

Además $\|\widetilde{\Psi}(f)\| = \|f\|$ para toda $f \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_n;F)$.

Demostración. Fijemos $(x_1,\dots,x_{n-1})$ con $x_i \in E_i$. Entonces

$$\|\Psi(f)(x_1,\dots,x_{n-1})(x)\| = \|f(x_1,\dots,x_{n-1},x)\| \le \|f\|\|x_1\|\cdots\|x_{n-1}\|\|x\|$$

Así $\Psi(f)(x_1,\dots,x_{n-1}) \in \mathcal{L}(E_n,F)$ y $\|\Psi(f)(x_1,\dots,x_{n-1})\| \le \|f\|\|x_1\|\cdots\|x_{n-1}\|$, lo cual implica también que $\Psi(f) \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_{n-1};\mathcal{L}(E_n,F))$ y $\|\Psi(f)\| \le \|f\|$. Fijemos ahora una función $g \in \mathcal{L}(E_1,\dots,E_{n-1};\mathcal{L}(E_n,F))$. Como

$$\|\Psi^{-1}(g)(x_1,\dots,x_n)\| = \|g(x_1,\dots,x_{n-1})(x_n)\| \le \|g(x_1,\dots,x_{n-1})\|\|x_n\| \le \|g\|\|x_1\|\cdots\|x_n\|$$

para todo $(x_1,\dots,x_n) \in E_1\times\cdots\times E_n$, la aplicación $\Psi^{-1}(g)$ es continua y $\|\Psi^{-1}(g)\| \le \|g\|$. La demostración se termina ahora aplicando la Proposición 2.14. $\square$

Capítulo 3

Cálculo Diferencial

Una función $f\colon U \to V$, donde $U \subseteq E$ y $V \subseteq F$ son subconjuntos abiertos de espacios de Banach E y F, es *diferenciable* en un punto $x_0 \in U$ si existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|f(x_0+v) - f(x_0) - T(v)\|}{\|v\|} = 0.$$

Es evidente que esto ocurre si y sólo si existe una función $R\colon U - x_0 \to F$, donde

$$U - x_0 := \{v \in E : v = u - x_0 \text{ para un } u \in U\},$$

tal que

$$f(x_0+v) = f(x_0) + T(v) + R(v) \quad \text{y} \quad \lim_{v\to 0} \frac{R(v)}{\|v\|} = 0.$$

Observación 3.1. *Si existe, T es único.*

Demostración. Supongamos que $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ tiene la misma propiedad que T. Usando que para cada $v \in E \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}\frac{\|T(v) - \widetilde{T}(v)\|}{\|v\|} &= \frac{\|(f(x_0+v) - f(x_0) - \widetilde{T}(v)) - (f(x_0+v) - f(x_0) - T(v))}{\|v\|}\\ &\le \frac{\|f(x_0+v) - f(x_0) - \widetilde{T}(v)\|}{\|v\|} + \frac{\|f(x_0+v) - f(x_0) - T(v)\|}{\|v\|},\end{aligned}$$

y que la expresión a la derecha de la desigualdad anterior es un infinitésimo cuando v tiende a cero, es facil ver que para todo $v \neq 0$

$$0 = \lim_{\lambda\to 0} \frac{\|T(\lambda\cdot v) - \widetilde{T}(\lambda\cdot v)\|}{\|\lambda\cdot v\|} = \lim_{\lambda\to 0} \frac{|\lambda|\|T(v) - \widetilde{T}(v)\|}{|\lambda|\|v\|} = \frac{\|T(v) - \widetilde{T}(v)\|}{\|v\|}.$$

Así, $T(v) = \widetilde{T}(v)$. Como T y $\widetilde{T}$ también coinciden en 0 porque son lineales, esto termina la demostración. □

Si f es diferenciable en x_0, la función T, cuya unicidad acabamos de probar, es llamada la *diferencial* de f en x_0 y denotada $\mathrm{D}f(x_0)$. Dejamos al lector la tarea de probar que si las normas de E y F se cambian por normas equivalentes, las funciones diferenciables y la diferencial permanecen invariantes.

Una función $f\colon U \to V$ es *diferenciable* si lo es en cada punto de U y es *diferenciable con continuidad* o de *clase* C^1 si además la función diferencial $\mathrm{D}f\colon U \to \mathcal{L}(E,F)$ es continua.

PROPOSICIÓN 3.2. *Si $f\colon U \to V$ es diferenciable en x_0, entonces f es continua en x_0.*

DEMOSTRACIÓN. Porque

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0)\| &= \lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0) - \mathrm{D}f(x_0)(x-x_0) + \mathrm{D}f(x_0)(x-x_0)\| \\
&\le \lim_{x\to x_0} \|f(x) - f(x_0) - \mathrm{D}f(x_0)(x-x_0)\| + \lim_{x\to x_0} \|\mathrm{D}f(x_0)(x-x_0)\| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

PROPOSICIÓN 3.3 (Linealidad). *Si $f\colon U \to V$ y $g\colon U \to V$ son diferenciables en x_0, entonces $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$ es diferenciable en x_0 para todo $\lambda, \mu \in k$ y*

$$\mathrm{D}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g)(x_0) = \lambda \cdot \mathrm{D}f(x_0) + \mu \cdot \mathrm{D}g(x_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Dejada al lector. □

TEOREMA 3.4 (Regla de la Cadena). *Sean $U \subseteq E$, $V \subseteq F$ y $W \subseteq G$ subconjuntos abiertos de espacios de Banach E, F y G. Si $f\colon U \to V$ es diferenciable en x_0 y $g\colon V \to W$ es diferenciable en $f(x_0)$, entonces $g^\circ f$ es diferenciable en x_0 y*

$$\mathrm{D}(g^\circ f)(x_0) = \mathrm{D}g(f(x_0))^\circ \mathrm{D}f(x_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Como g es diferenciable en $f(x_0)$ existe $R_g\colon V - f(x_0) \longrightarrow G$ tal que

$$g(f(x_0)+w) - g(f(x_0)) = \mathrm{D}g(f(x_0))(w) + R_g(w) \quad \text{y} \quad \lim_{w\to 0)} \frac{R_g(w)}{\|w\|} = 0.$$

Por la hipótesis sobre f existe $R_f\colon U - x_0 \to F$ tal que

$$f(x_0+v) - f(x_0) = \mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v) \quad \text{y} \quad \lim_{v\to 0} \frac{R_f(v)}{\|v\|} = 0.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
g\big(f(x_0+v)\big) - g\big(f(x_0)\big) &= g\big(f(x_0) + f(x_0+v) - f(x_0)\big) - g\big(f(x_0)\big) \\
&= \mathrm{D}g\big(f(x_0)\big)\big(f(x_0+v) - f(x_0)\big) + R_g\big(f(x_0+v) - f(x_0)\big) \\
&= \mathrm{D}g\big(f(x_0)\big)\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big) + R_g\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big) \\
&= \mathrm{D}g\big(f(x_0)\big)\big(\mathrm{D}f(x_0)(v)\big) + \widetilde{R}(v),
\end{aligned}$$

donde $\widetilde{R}(v)$ es la función de $U - x_0$ en G, definida por

$$\widetilde{R}(v) = \mathrm{D}g(f(x_0))\big(R_f(v)\big) + R_g\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big).$$

Para terminar la demostración, será suficiente mostrar que

$$\lim_{v\to 0} \frac{\|\widetilde{R}(v)\|}{\|v\|} = 0. \tag{12}$$

Escribamos

$$B(v) = \begin{cases} \frac{\|R_g\big(\mathrm{D}f(x_0)(v)+R_f(v)\big)\|}{\|\mathrm{D}f(x_0)(v)+R_f(v)\|} & \text{si } \mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v) \neq 0, \\ 0 & \text{si } \mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v) = 0. \end{cases}$$

Un cálculo directo muestra que si $v \in U - x_0$ es no nulo, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\|\widetilde{R}(v)\|}{\|v\|} &\leq \|\mathrm{D}g(f(x_0))\| \frac{\|R_f(v)\|}{\|v\|} + \frac{\|R_g\big(\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\big)\|}{\|v\|} \\ &= \|\mathrm{D}g(f(x_0))\| \frac{\|R_f(v)\|}{\|v\|} + B(v) \frac{\|\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\|}{\|v\|}. \end{aligned}$$

Estas desigualdades implican que (12) vale, ya que

$$\lim_{v\to 0} \|\mathrm{D}g(f(x_0))\| \frac{\|R_f(v)\|}{\|v\|} = \lim_{v\to 0} B(v) = 0,$$

y la función

$$v \mapsto \frac{\|\mathrm{D}f(x_0)(v) + R_f(v)\|}{\|v\|}$$

es acotada en un entorno reducido de 0. □

PROPOSICIÓN 3.5. *Denotemos con U un abierto de k y con V un abierto de un espacio de Banach F. Una función $f\colon U \to V$ es diferenciable en un punto $t_0 \in U$ si y sólo si f es derivable en t_0. Es decir, si y sólo si el límite*

$$f'(t_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

llamado derivada de f en t_0, *existe. Además, la diferencial de f en t_0 está dada por*

$$\mathrm{D}\, f(t_0)(h) = h \cdot f'(t_0).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que f es derivable en t_0. Entonces de la igualdad

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0) - h \cdot f'(t_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - f'(t_0) = 0.$$

se sigue que f es diferenciable en t_0 y $\mathrm{D}f(t_0)(h) = h \cdot f'(t_0)$. Supongamos ahora que f es diferenciable en t_0 y tomemos $y \in F$ tal que $\mathrm{D}f(t_0)(h) = h \cdot y$. De la igualdad

$$0 = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0) - h \cdot y}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} - y$$

se sigue que f es derivable en t_0 y $f'(t_0) = y$. □

EJEMPLOS 3.6. *A continuación damos unos pocos ejemplos de funciones diferenciables.*

1. *Si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces T es diferenciable y $DT(x) = T$ para todo $x \in E$.*
2. *Las funciones constantes $c\colon E \to F$ son diferenciables, con diferencial nula.*
3. *Si A es un álgebra de Banach, entonces la función $f\colon U(A) \to U(A)$, definida por $f(a) = a^{-1}$, es diferenciable y $\mathrm{D}f(a)(b) = -a^{-1}ba^{-1}$. En efecto, usando que*

$$(a + x)^{-1} - a^{-1} = (a + x)^{-1}(a - (a + x))a^{-1} = -(a + x)^{-1}xa^{-1},$$

y haciendo algunas acotaciones sencillas, obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\frac{\|f(a+x)-f(a)+a^{-1}xa^{-1}\|}{\|x\|} &= \frac{\|-(a+x)^{-1}xa^{-1}+a^{-1}xa^{-1}\|}{\|x\|}\\ &\leq \frac{\|(a+x)^{-1}-a^{-1}\|\|x\|\|a^{-1}\|}{\|x\|}\\ &= \|(a+x)^{-1}-a^{-1}\|\|a^{-1}\|.\end{aligned}$$

La afirmación se sigue inmediatamente de este hecho ya que $\|(a+x)^{-1}-a^{-1}\|\|a^{-1}\|$ *tiende a* 0 *cuando* x *tiende a* 0.

1. Derivaciones entre Productos de Espacios de Banach

Vamos a estudiar ahora la diferenciabilidad de funciones cuyo dominio o codominio es un producto de un número finito de espacios de Banach, o bien que se factorizan a través de un espacio que lo es. Consideremos entonces un producto de espacios de Banach $F_1\times\cdots\times F_n$ y denotemos con $\pi_i\colon F_1\times\cdots\times F_n\to F_i$ a las proyecciones canónicas y con $u_i\colon F_i\to F_1\times\cdots\times F_n$ a las inclusiones canónicas. Notemos que

- $\pi_i\circ u_i=\mathrm{id}_{F_i}$,
- $\sum_{i=1}^n u_i\circ\pi_i=\mathrm{id}_{F_1\times\cdots\times F_n}$.

TEOREMA 3.7. *Consideremos un abierto* U *de un espacio de Banach* E *y un producto* $F_1\times\cdots\times F_n$ *de espacios de Banach. Una función* $f\colon U\to F_1\times\cdots\times F_n$ *es diferenciable en un punto* x_0 *si y sólo si cada una de sus componentes* $f_i : 0\pi_i\circ f$ *lo es. Además,* $\mathrm{D}f(x_0)=\sum_{i=1}^n u_i\circ\mathrm{D}f_i(x_0)$.

DEMOSTRACIÓN. Si f es diferenciable en x_0, entonces por la regla de la cadena y el item 1 de los Ejemplos 3.6 $f_i=\pi_i\circ f$ es diferenciable en x_0 y $\mathrm{D}f_i(x_0)=\pi_i\circ\mathrm{D}f(x_0)$. Por las mismas razones, si las f_i's son diferenciables en x_0, entonces

$$f=\sum_{i=1}^n u_i\circ\pi_i\circ f=\sum_{i=1}^n u_i\circ f_i$$

también lo es y $\mathrm{D}f(x_0)=\sum_{i=1}^n u_i\circ\mathrm{D}f_i(x_0)$. □

LEMA 3.8. *Si* F_1, F_2 *y* G *son espacios de Banach y* $h\colon F_1\times F_2\to G$ *es una función bilineal y continua, entonces* h *es diferenciable y* $\mathrm{D}h(x_0,y_0)(v,w)=h(v,y_0)+h(x_0,w)$.

DEMOSTRACIÓN. Debemos probar que

$$\lim_{(v,w)\to 0}\frac{\|h((x_0,y_0)+(v,w))-h(x_0,y_0)-h(v,y_0)-h(x_0,w)\|}{\|(v,w)\|}=0.$$

Pero esto se sigue inmediatamente de que

$$\begin{aligned}\frac{\|h((x_0,y_0)+(v,w))-h(x_0,y_0)-h(v,y_0)-h(x_0,w)\|}{\|(v,w)\|} &= \frac{\|h(v,w)\|}{\|(v,w)\|}\\ &\leq \frac{\|h\|\|v\|\|w\|}{\|(v,w)\|}\\ &\leq \|h\|\|w\|\end{aligned}$$

y de que $\lim_{(v,w)\to 0}\|h\|\|w\|=0$. □

EJEMPLO 3.9. *Si A es un álgebra de Banach, entonces la multiplicación $m\colon A\times A\to A$ es diferenciable y $\mathrm{D}m(a,b)(v,w)=vb+aw$.*

PROPOSICIÓN 3.10. *Consideremos espacios de Banach E, F_1, F_2 y G y un subconjunto abierto U de E. Si $f_1\colon U\to F_1$ y $f_2\colon U\to F_2$ son funciones diferenciables en un punto $x_0\in U$ y $h\colon F_1\times F_2\to G$ es una función bilineal y continua, entonces la función $w\colon U\to G$, definida por $w(x)=h(f_1(x),f_2(x))$, es diferenciable en x_0 y*

$$\mathrm{D}w(x_0)(v)=h(\mathrm{D}f_1(x_0)(v),f_2(x_0))+h(f_1(x_0),\mathrm{D}f_2(x_0)(v)).$$

DEMOSTRACIÓN. Por la regla de la cadena y el Teorema 3.7, sabemos que

$$\mathrm{D}w(x_0)(v)=\mathrm{D}h\big(f_1(x_0),f_2(x_0)\big)\big(\mathrm{D}f_1(x_0)(v),\mathrm{D}f_2(x_0)(v)\big).$$

El resultado se obtiene ahora inmediatamente aplicando el Lema 3.8. □

COROLARIO 3.11. *Consideremos un abierto U de un espacio de Banach E y un álgebra de Banach A. Si $f_1\colon U\to A$ y $f_2\colon U\to A$ son funciones diferenciables en un punto $x_0\in U$, entonces $fg\colon U\to A$ es diferenciable en x_0 y $\mathrm{D}(fg)(x_0)(v)=f(x_0)\,\mathrm{D}g(x_0)(v)+\mathrm{D}f(x_0)(v)g(x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. se sigue inmediatamente de la Proposición 3.10 y el Ejemplo 3.9. □

1.1. Derivadas Parciales Consideremos ahora una función $f\colon U\to V$, cuyo dominio es un abierto U de un producto de espacios de Banach $E_1\times\cdots\times E_n$ y cuyo codominio es un abierto V de un espacio de Banach F. Dado $\mathbf{a}=(a_1,\cdots,a_n)\in U$, definimos $\lambda_i\colon E_i\to E_1\times\cdots\times E_n$ por

$$\lambda_i(x)=(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n).$$

Denotemos con U_i a la preimagen $\lambda_i^{-1}(U)$ de U por λ_i. Si la función $f\circ\lambda_{i|U_i}$ es diferenciable en a_i, entonces llamamos a su diferencial la *diferencial parcial i-ésima* de f en a y la denotamos $\mathrm{D}_i f(\mathbf{a})$ o $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$. De la definición se sigue inmediatamente que

$$\lim_{x_i\to a_i}\frac{\|f(a_1,\dots,a_{i-1},x,a_{i+1},\dots,a_n)-f(\mathbf{a})-\mathrm{D}_i f(\mathbf{a})(x_i-a_i)\|}{\|x_i-a_1\|}=0.$$

Cuando cada E_i es igual a k, se suele identificar la función lineal $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})$ con su valor $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a})(1)$ en 1, llamado *derivada parcial i-ésima* de f en $\mathbf{a}$.

OBSERVACIÓN 3.12. *Para cada abierto $U\subseteq E_1\times\cdots\times E_n$, si $f\colon U\to V$ es diferenciable en un punto $\mathbf{a}$ de U, entonces existen todas las diferenciales parciales de f en a. Además $\mathrm{D}_i f(a)=\mathrm{D}f(a)\circ u_i$, donde $u_i\colon E_i\to E_1\times\cdots\times E_n$ es la inclusión canónica, y*

$$Df(a)=\sum_{i=1^n}\mathrm{D}_i f(a)\circ p_i,$$

donde $p_j\colon E_1\times\cdots\times E_n\to E$.

DEMOSTRACIÓN. Esto es una consecuencia inmediata de la regla de la cadena y de que $\sum_{i=1}^n u_i\circ p_i=\mathrm{id}_{E_1\times\cdots\times E_n}$. □

COROLARIO 3.13. *Para cada abierto $U\subseteq E_1\times\cdots\times E_n$, una función diferenciable*

$$f\colon U\to V$$

es de clase C^1 si y sólo si sus derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U\to\mathcal{L}(E_i,F)$$

son continuas.

2. El teorema de los incrementos finitos

Recordemos que para cada par de puntos a y b de un espacio de Banach E, el segmento $[a,b]$ es el conjunto

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b : 1 \leq t \leq 1\},$$

de E.

LEMA 3.14. *Consideremos una función continua $g\colon [0,1] \to F$, donde F es un espacio de Banach. Si f es derivable en $(0,1)$ y $\|f'(t)\| \leq M$ para todo t, entonces $\|f(1) - f(0)\| \leq M$*

DEMOSTRACIÓN. Afirmamos que

$$\|f(x) - f(0)\| \leq (M+\epsilon)x \quad \text{para todo } x \in [0,1] \text{ y todo } \epsilon > 0. \tag{13}$$

En efecto, supongamos que esto no es cierto para algun ϵ y denotemos con x_0 al ínfimo de los x's para los que la desigualdad es falsa. Notemos primero que $\|f(x_0) - f(0)\| \leq (M+\epsilon)x_0$, porque de lo contrario la desigualdad (13) sería falsa para un $x < x_0$. Notemos también que por la definición de $f'(x_0)$ y el hecho de que $\|f(x_0)\| \leq M$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(t) - f(x_0)\| \leq (M+\epsilon)(t - x_0) \quad \text{para todo } t \in [0,1] \text{ entre } x_0 \text{ y } x_0 + \delta.$$

Pero entonces

$$\|f(t) - f(0)\| \leq \|f(t) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(0)\| \leq (M+\epsilon)x_0 + (M+\epsilon)(t - x_0),$$

lo que contradice la definición de x_0. □

TEOREMA 3.15 (Teorema de los incrementos finitos). *Para cada función diferenciable $f\colon U \to F$ y cada segmento $[a,b] \subseteq U$,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq \sup_{x\in[a,b]} \|Df(x)\| \|b-a\|.$$

DEMOSTRACIÓN. Si $\sup_{x\in[a,b]} \|Df(x)\| = \infty$ esto es evidente. Así que supongamos que

$$\sup_{x\in[a,b]} \|Df(x)\| = N \in \mathbb{R}_{\leq 0}$$

y veamos que $\|f(b) - f(a)\| \leq N\|b-a\|$. Consideremos la función $g\colon [0,1] \to F$ definida por $g(t) := f(at + (1-t)b)$. Notemos que g es continua. Además, por la regla de la cadena es diferenciable en cada $t \in (0,1)$ y

$$g'(t) = Df(at + (1-t)b)(a-b).$$

Por el Lema 3.14

$$\|f(b) - f(a)\| = \|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{t\in(0,1)} \|g'(t)\| = N\|b-a\|,$$

como queríamos. □

COROLARIO 3.16. *Si $f\colon U \to F$ es diferenciable, U es conexo y $Df(x) = 0$ para todo $x \in U$, entonces f es constante.*

Demostración. Tomemos un $x_0 \in U$ y consideremos el conjunto $C = f^{-1}(f(x_0))$. Por un lado, como f es continua C es cerrado en U. Por otro lado, como U es abierto, para cada punto $x \in C$ existe un $\epsilon_x > 0$ tal que $B_{\epsilon_x}(x) \subseteq U$, y usando el Teorema de los incrementos finitos se comprueba fácilmente que $B_{\epsilon_x}(x) \subseteq C$. Así, C es abierto. Como U es conexo esto implica que $U = C$. □

Teorema 3.17. *Consideremos una función $f\colon U \to V$, cuyo dominio es un abierto U de un producto de espacios de Banach $E_1 \times \cdots \times E_n$ y cuyo codominio es un abierto V de un espacio de Banach F. Si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ existen en todo punto x de U y las funciones*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathcal{L}(E_i, F)$$

son continuas en un punto x_0 de U, entonces f es diferenciable en x_0.

Demostración. □

Teorema 3.18. *Consideremos una función $f\colon U \to V$, cuyo dominio es un abierto U de un producto de espacios de Banach $E_1 \times \cdots \times E_n$ y cuyo codominio es un abierto V de un espacio de Banach F. Para que f sea de clase C_1 es necesario y suficiente que existan las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ y que las funciones*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon U \to \mathcal{L}(E_i, F)$$

sean continuas.

Demostración. La necesidad se sigue inmediatamente de la Observación 3.12, y la suficiencia del Teorema 3.17 y el Corolario 3.13. □